2007–11–08

$$-\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + r(x)\, u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \Gamma = \text{randen till } \Omega$$

$u(x) = 0, x \in \Gamma.$

$$\sum a_{jk} \xi_j \xi_k \geqslant \gamma \sum |\xi_j|^2; \quad r(x) \geqslant 0$$

$H^1(\Omega); H^{01}(\Omega).\ v(x) \in H^{01}(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle = (f, v) \quad \text{(IE)}$$

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left(\sum a_{jk}\, u_j\, v_k + r\, u\, v \right) \mathrm{d}x$$

$$(f, v) = \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x$$

$u \in H^{01}$ är en svag (generaliserad) lösning om IE gäller för alla $v \in H^{01}$.

1. Lösningen finns för alla $f \in L_2(\Omega)$.

2. Det finns bara en lösning.

3. Hur söker man en approximativ lösning?

Väljer något L_h – underrum till H^{01}, (Grigori hävdar att det bara bor 300 Persson i Kungsbacka; Eniro hittar 747 Persson:s.) med ändlig dimension. Som approximativ lösning $u_h \in L_h$ tar vi projektionen av u på L_h.

$$\langle u_h - u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in L_h$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — bas i L_h. Söker $u_h = \sum \alpha_k \varphi_k$. System för att söka α_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

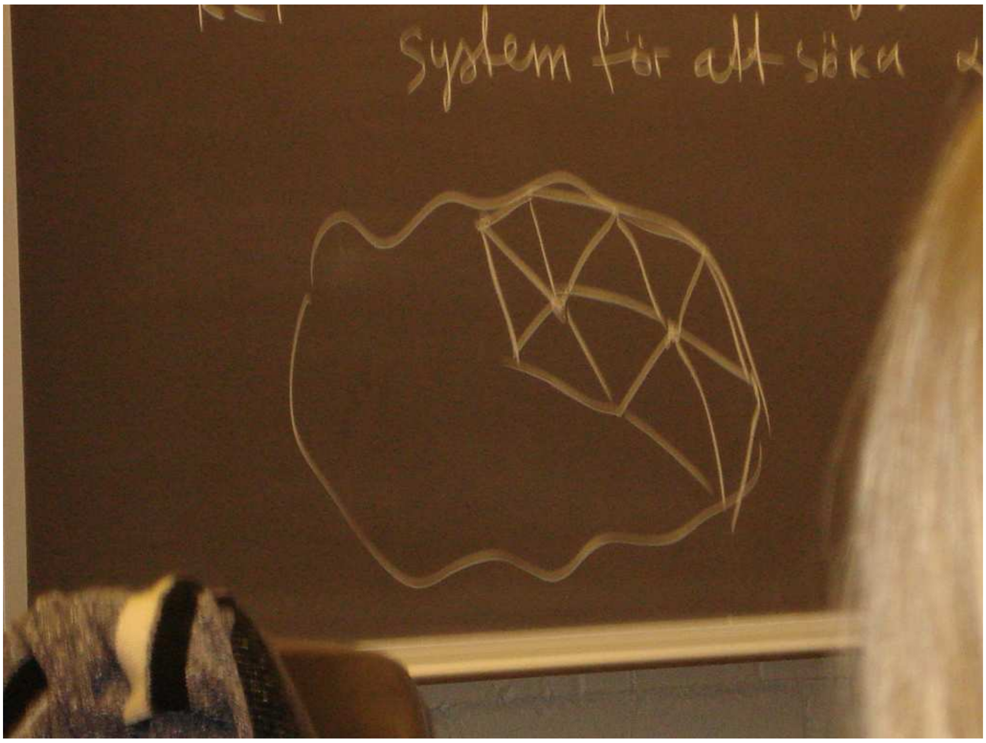

Figure 1.

ANMÄRKNING: icke-homogena randvillkor:

$$u(x) = y(x), \quad x \in \Gamma$$

Vi tar någon $u_0 \in H^1$ så att u_0 satisfierar randvillkoren, och söker $u(x)$ som $u_0(x) + w(x)$.

$$\langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u_0, v \rangle, \quad \langle u, v \rangle = (f, v)$$

$$\Rightarrow \text{söker } w \in H^{01}: \quad \langle w, v \rangle = (f, v) - \langle u_0, v \rangle, \quad \text{för alla } v \in H^{01}$$

IE för inhomogena randvillkor.

Fråga: Är den svaga lösningen en vanlig lösning?

Svar: Om den svaga lösningen är två gånger deriverbar, så är det den starka lösningen.

$$(p(x)\, u')' + r(x)\, u = f, \quad u(a), u(b) = 0$$

$$\int_a^b (p\, u'\, v' + r\, u\, v) \mathrm{d}x = \int_a^b f\, v\, \mathrm{d}x \quad \text{alla } v \in H^{01}$$

Partiellintegrera:

$$\int_a^b ((-p\, u')' + r\, u - f) v\, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H^{01}$$

Vi approximerar $-(p\, u')' + r\, u - f$ med glatta funktioner $v_k \in H^{01}$ i L_2-normen. För varje v_k har vi

$$\int ((-p\, u')' + r\, u - f)\, v_k\, \mathrm{d}x = 0$$

$k \to \infty, v_k \to (-p\, u')' + r\, u - f$

$$\Rightarrow \int ((-p\, u')' + r\, u - f)^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow (-p\, u')' + r\, u - f = 0$$

3. Andra randvillkor.

Ex. Neumann-randvillkor

$$-(p\,u')' + r(x)\,u = f, \quad x \in (a,b), \quad r(x) \geqslant r_0 > 0$$

$$u'(a) = u'(b) = 0$$

$H^1(a,b)$:

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b (p\,u'\,v' + r\,u\,v)\mathrm{d}x$$

Tar $v \in H^1(a,b)$, mulitiplicera med ekvationen:

$$\int_a^b -(p\,u')'\,v\,\mathrm{d}x + \int_a^b r(x)\,u\,v\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b p\,u'\,v'\,\mathrm{d}x - p(b)\underbrace{u'(b)}_{=0}v(b) + p(a)\underbrace{u'(a)}_{=0}v(a) = \int_a^b r\,u\,v\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\langle u, v\rangle = (f, v)$$

$u \in H^1$ är en svag lösning.

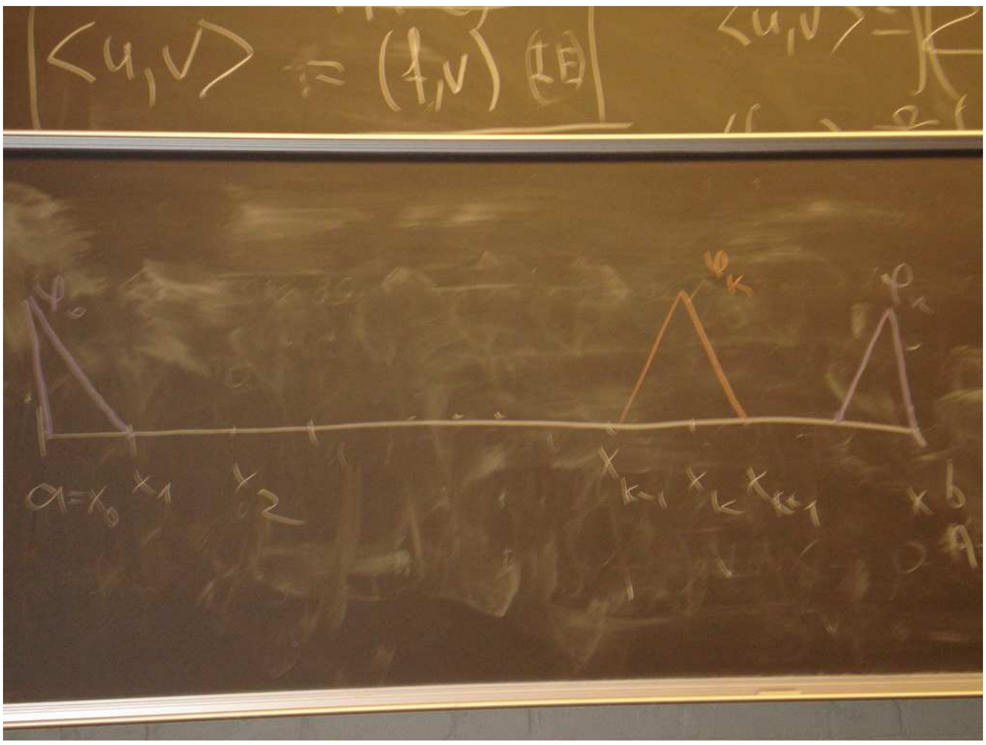

Figure 2.

Vi betraktar intervallet noll till ett.

$$f(x) = x^{\alpha}$$

1. För vilka α har vi $f \in L_2$?

$$\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x < \infty, \quad \int_0^1 x^{2\alpha} \,\mathrm{d}x < \infty, \quad 2\alpha > -1$$

2. För vilka α har vi $f \in H^1$?

$$f' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

$$(f')^2 = \alpha^2 x^{2\alpha - 2}$$

$$\alpha^2 \int x^{2\alpha - 2} \mathrm{d}x < \infty, \quad 2\alpha - 2 > -1, \quad 2\alpha > 1, \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

3. $f \in H^1(a, b); g \in \mathcal{C}^1(a, b)$. Gäller $f g \in H^1$?

$$f g \in L_2; \quad (f g)' = f' g + f g'$$

L_2, begränsad. Vi stannar i Sobolevrummet.

4. $f, g \in H^1$. $f g \in H^1$?

$$(f g)' = f' g + f g'$$

$f' \in L_2$. g är begränsad!