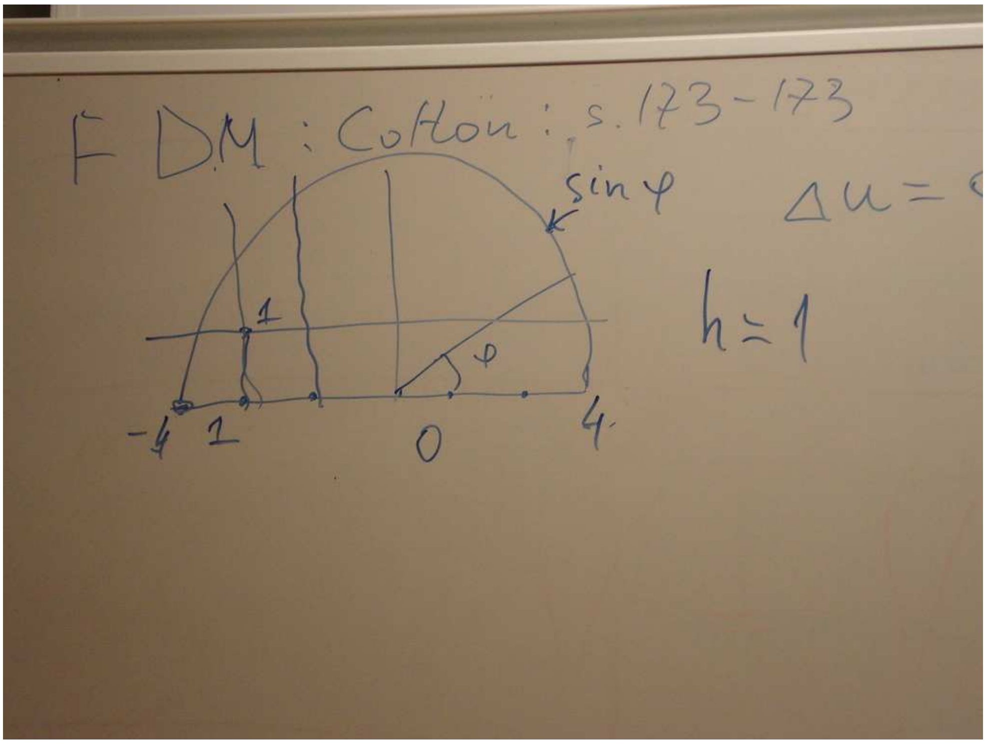
2007–11–05

Finita differensmetoden: Colton: s. 173–173. Första inlämningsuppgiften illustreras i ⟨fig1⟩

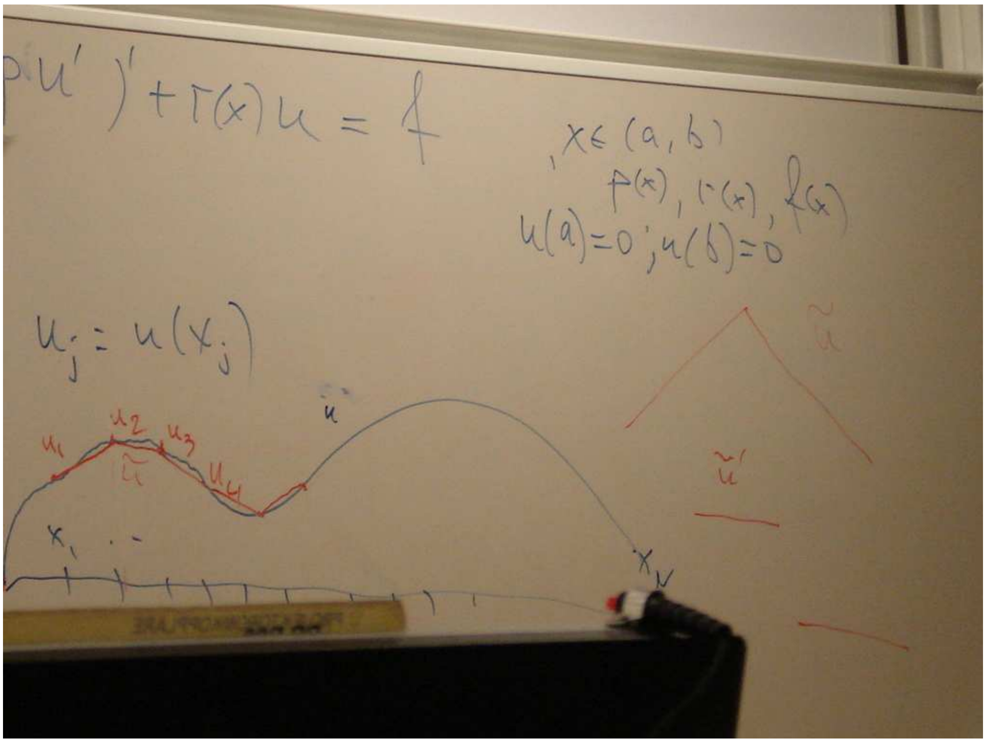


Figur 1. Lös Laplaceekvationen $\Delta u = 0$. Randvillkor: noll på diametern, $\sin\varphi$ på halvcirkeln. $h = 1$

$$-(p\,u')' + r(x)\,u = f$$

$$\begin{cases} x \in (a, b) \\ p(x), r(x), f(x) \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases}$$

Söker funktionens värde i ett antal punkter $u_j = u(x_j)$.



Figur 2.

Generaliserade, svaga lösningar

$$p(x) \geqslant c_0 > 0, \quad r(x) \geqslant 0, \quad f \in L_2(a, b)$$

Sobolevrum $H^1(a,b)$

$$u(x)\colon \quad u\in L_2(a,b); \quad u'\in L_2(a,b)$$

$$\overset{0}{H}{}^1\;(a,b)\colon u(a)=u(b)=0$$

Antar att $u(x)$ är en lösning till vårt problem. Tar någon annan funktion $v(x)\in H^{01}(a,b)$. Multiplicerar ekvationen med $v(x)$ och integrerar.

$$-\left(p(x)u'\right)'v+r(x)\,u\,v=f\,v$$

$$-\int_a^b (p(x)u')'\,v\,\mathrm{d}x+\int_a^b r(x)\,u\,v\,\mathrm{d}x=\int_a^b f\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b p(x)u'\,v'\,\mathrm{d}x+\int_a^b r(x)\,u\,v=\int_a^b f(x)\,v\,\mathrm{d}x \quad \text{(IE)}$$

(Integralidentitet.)

Om u är en vanlig lösning så håller (IE) för alla $v\in H^{01}$.

Vi säger att $u\in H^{01}$ är en generaliserad lösning till problemet om (IE) gäller för alla $v\in H^{01}$.

Sats: Generaliserade lösningen finns alltid; det finns bara en generaliserad lösning.

|||.

Beteckna skalärprodukten i H^1 som $\langle u,v\rangle_{H^1}$:

$$\langle u,v\rangle_{H^1}=\int_a^b p(x)u'\,v'\,\mathrm{d}x+\int_a^b r(x)\,u\,v\,\mathrm{d}x$$

H^{01} med den produkten är ett Hilbertrum.

$$\|u\|_{H^1}^2=\langle u,u\rangle$$

Fullständigt (varje Cauchyföljd i rummet konvergerar i rummet).

$$\|u_m-u_n\|\to 0 \quad \exists u\colon \|u_n-u\|\to 0, \quad m,n\to\infty$$

Generaliserad lösning på ett annat sätt: $u\in H^{01}$ är GL om IE: $\langle u,v\rangle=(f,v)$ för alla $v\in H^1$ där

$$(f,v)=\int_a^b f\,v\,\mathrm{d}x$$

SATS: Det kan vinnas $\leqslant 1$ generaliserad lösning.

Bevis. Antar att det finns två lösningar, u_1 och u_2. Betrakta $u = u_1 - u_2$:

$$(\mathrm{IE}) \Rightarrow \langle u, v\rangle = \langle u_1 - u_2, v\rangle = 0 \quad \forall v \in H^{01}$$

Tag $v = u$: $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. Skillnaden är noll. □

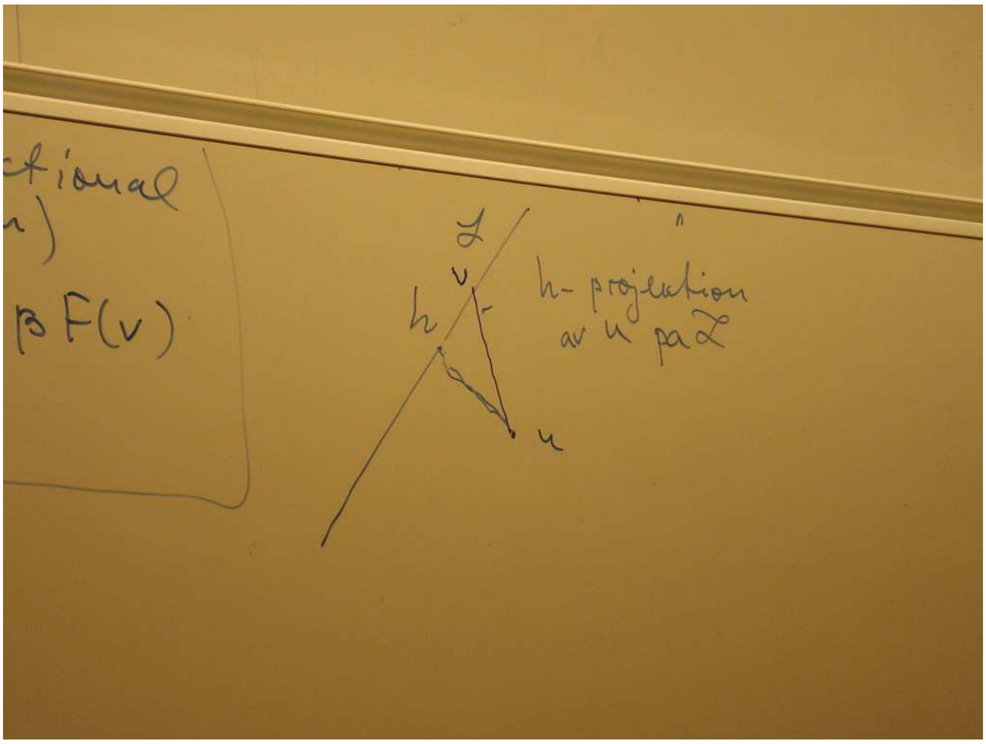
F. RIESZ SATS: $F(u)$ är en linjär kontinuerlig funktional, $u \in H$ (Hilbertrum), om $F(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, F(u) + \beta F(v)$, $|F(u)| \leqslant C\, ||u||$.

1. Om $F(u)$ är en linjär kontinuerlig funktional gäller:

$$\exists u_0: \quad F(u) = \langle u_0, u\rangle$$

2. Låt L vara ett slutet underrum i H och $u \in H$. Då finns $h \in L$ så att $u - h \perp L$ och $||h - u|| \leqslant ||v - u|| \forall v \in L$.

$|||$.



Figur 3. h är projektionen av u på L

Poincaré-Friedrichs olikhet. Det finns en konstant c (beroende på p, r)

$$u \in H^{01} \Rightarrow \|u\|_{H^1}^2 \geqslant c \int_a^b u^2 \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)^2) = 2\, u(x)\, u'(x)$$

$$u(x)^2 = 2 \int_a^x u(x)\, u'(x)\, \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_a^x |u(x)|\, |u'(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_a^b |u(x)|\, |u'(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant [\text{Cauchy-Schwarz}] \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\int_a^b u(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b u'(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^b u(x)^2 \mathrm{d}x \leqslant 2\,(b-a) \left(\int_a^b u(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b u'(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_a^b u(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\,(b-a) \left(\int_a^b u'(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\,(b-a)\, c_0^{-1} \left(\int_a^b p(x)\, u'(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

(Vi hade $p(x) \geqslant c_0$.)

Sats: Generaliserade lösningen finns alltid $\forall f \in L_2$.

Bevis. Vi betraktar funktionalen.

$$F(v) = (f, v) = \int_a^b f\, v\, \mathrm{d}x$$

F är linjär.

Cauchy-Schwarz:

$$|F| \leqslant \|f\|\, ||v||$$

Poincaré-Friedrichs olikhet:

$$\leqslant c\, ||f||_{L_2}\, ||v||_{H^1}$$

(begränsad i H^1)

Det finns $u \in H^1$, Riesz: $f(v) = \langle u, v \rangle$; u är den generaliserade lösningen. □

Hur söker man lösningen?

Vi söker en approximation u_h till u. (u_h är inte en lösning, den bara approximerar u.)

L_h är ett ändligt-dimensionellt underrum i H^{01}. Vi söker u_h som projektionen av u på L_h (enligt Riesz-2). Hur söker vi projektionen? Vi tar en bas i rummet L_h: φ_1, φ_2, ..., φ_N. Vi söker u_h som en linjärkombination av baselementen.

$$u_h = \alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_N$$

där $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ är några sökta tal.

Riesz: $u - u_h \perp L_h$. $\langle u - u_h, v \rangle_{H^1} = 0$, för alla $v \in L_h$.

$$\langle u, v \rangle = \langle u_h, v \rangle \quad \forall v \in L_h$$

$$(f, v) = \langle u_h, v \rangle \quad \forall v \in L_h \quad (\mathrm{IE}_h)$$

Vi tar här $v = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$:

$$\langle u_h, \varphi_k \rangle = (f, \varphi_k) = \int_a^b f \varphi_k \mathrm{d}x$$

$$\left\langle \sum_j \alpha_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = (f, \varphi_k)_{k=1,\ldots,N}$$

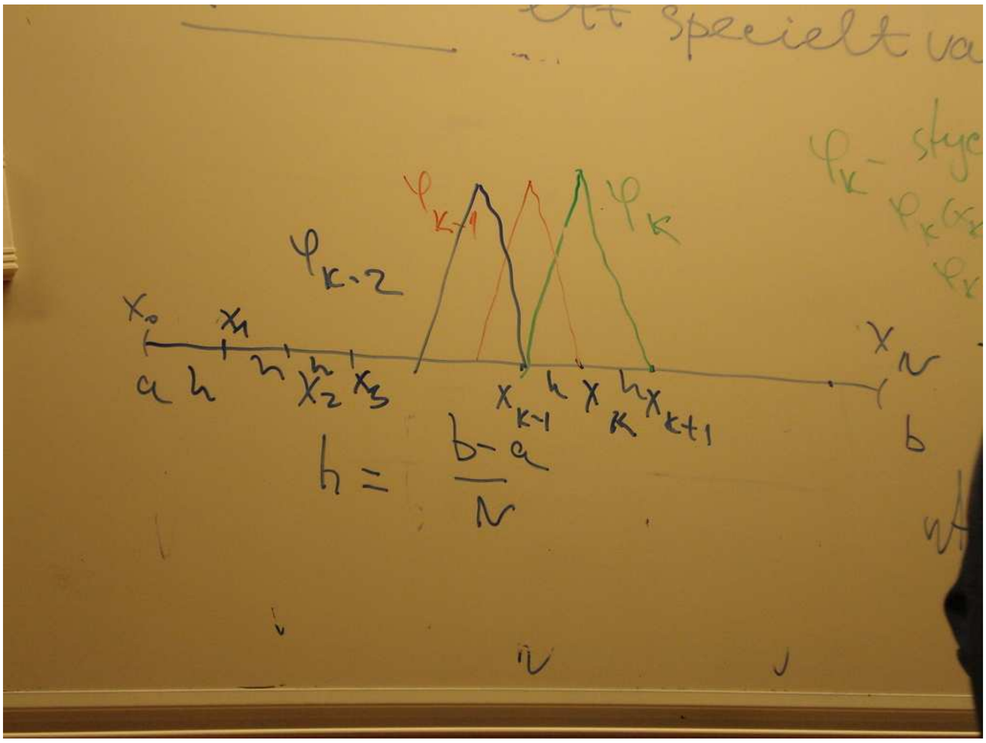
$$\sum_j \alpha_j A_{jk} = B_k$$

$$A_{jk} = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_a^b (p \varphi_j' \varphi_k' + r \varphi_j \varphi_k) \mathrm{d}x$$

$$B_k = \int_a^b f \varphi_k \mathrm{d}x$$

A kallas för styvhetsmatris, B kallas lastvektor.

Finita elementmetoden FEM — ett speciellt val av φ_k.



Figur 4.

φ_k väljs som en styckvis linjär funktion med $\varphi_k(x_k) = 1$ och $\varphi_k(x_j) = 0$ för $j \neq k$. Alla $A_{jk} = 0$

förutom $j=k-1,k,k+1$.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Felet är $\mathcal{O}(h)$.

Adaptiva FEM p liten $\Rightarrow$ elementen små. r stor $\Rightarrow$ elementen små

FEM för elliptiska ekvationer

$\Omega\subset\mathbb{R}^N$, Ω begränsat; Γ är randen till Ω.

$$-\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+r(x)\,u=f\quad \text{i }\Omega.$$

med Dirichletrandvillkor $u(x)=0$ för $x\in\Gamma$. Divergent form. a_{jk}: alla egenvärden har samma tecken (positiva). Matrisen (a_{jk}) är positivt definit.

$$\sum_{j,k}a_{jk}\,\xi_i\,\xi_k\geqslant\gamma\sum\xi_j^2,\qquad\gamma>0;\qquad r(x)\geqslant 0$$

Generaliserade lösningen.

H^1: $u\in L_2(\Omega), u_j\in L_2$.

H^{01}: $u\in H^1$: $u(x)=0$ när $x\in\Gamma$. (Grigori skriver nollan över H^1, men jag kan inte det här.)

$$\langle u,v\rangle_{H^1}=\int_\Omega a_{jk}u_j\,v_k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega r(x)\,u\,v\,\mathrm{d}x$$

Tar $v\in H^{01}$, multiplicerar med ekvationen och integrerar på Ω:

$$-\int_\Omega\sum\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]v\,\mathrm{d}^Nx+\int_\Omega r(x)\,u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}^Nx=\int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]\cdot v=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}v\right)-a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\Phi_k=\sum_j a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}v$$

$$-\int_\Omega\operatorname{div}\Phi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\sum a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Gauss:

$$\int_\Omega\operatorname{div}\Phi\,\mathrm{d}x=\int_\Gamma(\Phi,n(x))\mathrm{d}x=[\text{här}]=0$$

eftersom $v=0$ på randen.

$$\int_\Omega\sum a_{jk}u_j\,v_k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega r(x)\,u\,v\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x\qquad\text{(IE)}$$

Generaliserade lösningar: sådan funktion $u\in H^{01}(\Omega)$ så att IE gäller för alla $v\in H^{01}(\Omega)$.

SATS: Den svaga lösningen finns för varje $f\in L_2$ och är bara en. $|||$.

En kortare form av IE:

$$\langle u,v\rangle_{H^1}=(f,v)\quad\forall v\in H^{01}$$