# 2006–04–26

### Allmän stelkroppsdynamik

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M} \quad \text{(kring masscentrum eller fix punkt)}$$

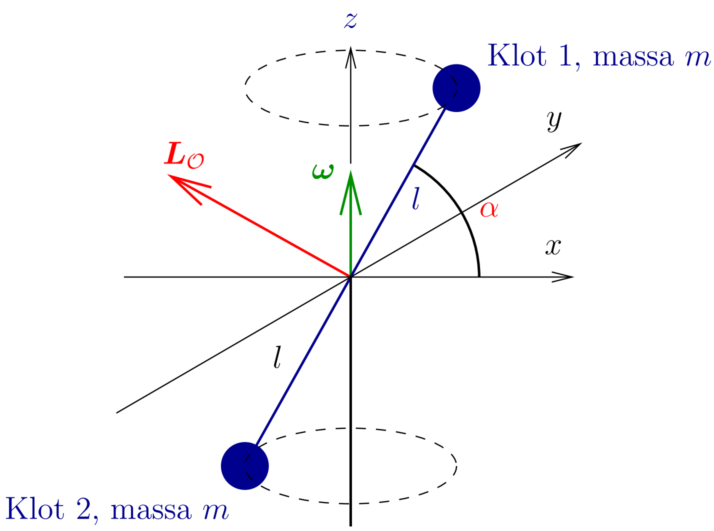
$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}) = ? \quad \text{(för plan rörelse: } L = I\,\omega, \text{ där } I \text{ är tröghetsmomentet)}$$

Hur kan $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega})$ se ut?

- Linjär (varje del av kroppen ger $\boldsymbol{L}_i = m\,\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$, där $\boldsymbol{v}_i \propto \boldsymbol{\omega}$)

$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\omega}$ är vektorer. $\boldsymbol{L} \stackrel{?}{=} I\,\boldsymbol{\omega}$ för något tal $I$. **Nej**, inte så!

Exempel. Se figur 1.




**Figur 1.**

$$\boldsymbol{L}_o = \boldsymbol{L}_{o1} + \boldsymbol{L}_{o2}$$

$$\boldsymbol{L}_{o1} = m\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1)$$

$$|\boldsymbol{v}| = \omega\,l\cos\alpha$$

$$|\boldsymbol{L}_{o1}| = m\,\omega\,l^2$$

Rörelsemomentet pekar inte i samma riktning som $\boldsymbol{\omega}$.

$\boldsymbol{L} \stackrel{?}{=} I\,\boldsymbol{\omega}, I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\quad \boldsymbol{L} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\omega}$. **Nej**, inte kryssprodukt — då skulle de vara vinkelräta.

"Räkna ut $\boldsymbol{L}$". ⟨fig34⟩. $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$:

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{e}_x + \omega_y \boldsymbol{e}_y + \omega_z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r} = x \boldsymbol{e}_x + y \boldsymbol{e}_y + z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (\omega_y z - \omega_z y) \boldsymbol{e}_x + (\omega_z x - \omega_x z) \boldsymbol{e}_y + (\omega_x y - \omega_y x) \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] \boldsymbol{e}_x + \text{cyklisk permutation} =$$

$$= \left[(y^2 + z^2)\,\omega_x - x\,y\,\omega_y - x\,z\,\omega_z\right] \boldsymbol{e}_x + \ldots$$

$$\boldsymbol{L}_i = \begin{pmatrix} L_{i,x} \\ L_{i,y} \\ L_{i,z} \end{pmatrix} = m_i \left(\begin{array}{c|c|c} y^2 + z^2 & -x\,y & -x\,z \\ \hline -x\,y & x^2 + z^2 & -y\,z \\ \hline -x\,z & -y\,z & x^2 + y^2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_i \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i = I \boldsymbol{\omega} \quad \text{där} \quad I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & \sum_i -m_i x_i y_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$I_{11} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$$

$y_i^2 + z_i^2$ är kvadraten på avståndet till $x$-axeln. $I_{11}$ är tröghetsmomentet med avseende på $x$-axeln. $I_{22}$ och $I_{33}$ är också, på samma sätt, tröghetsmoment med avseende på koordinataxlarna. $I_{12} = I_{21}, I_{13} = I_{31}, I_{23} = I_{32}$ finns också. De kallas deviationsmoment.

Exempel. Se figur 1.

$$I = \begin{pmatrix} 2\,m\,l^2 \sin^2\alpha & 0 & 2\,m\,l^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 2\,m\,l^2 & 0 \\ 2ml^2 \sin\alpha\cos\alpha & 0 & 2\,m\,l^2\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$I\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2\,m\,l^2 \sin^2\alpha & 0 & -2\,m\,l^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 2\,m\,l^2 & 0 \\ -2ml^2 \sin\alpha\cos\alpha & 0 & 2\,m\,l^2\cos^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m\,l^2\,\omega\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ 2\,m\,l^2 \omega\cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= 2\,m\,l^2\,\omega\cos\alpha(-\boldsymbol{e}_x \sin\alpha + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha)$$

⟨fig35⟩. I grekiska systemet: $\boldsymbol{\omega} = \omega(\boldsymbol{e}_\zeta \cos\alpha + \boldsymbol{e}_\xi \sin\alpha)$.

$$I_{\text{grek}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,m\,l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,m\,l^2 \end{pmatrix}$$

Det finns "bra" och "dåliga" system att räkna ut $I$ i.

- Det finns alltid ett koordinatsystem där tröghetsmatrisen $I$ är diagonal.

- Egenvärdena till $I$ är tröghetsmoment med avseende på axlar som är parallella med egenvektorerna.
- Om $\boldsymbol{\omega}$ är egenvektor till $I$: $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{L} \| \boldsymbol{\omega}$.
- Egenvärden $\geqslant 0$.
- Om $\boldsymbol{\omega}$ inte är egenvektor är $\boldsymbol{L}$ inte parallell med $\boldsymbol{\omega}$. Då roteras $\boldsymbol{L}$ av $\boldsymbol{\omega}$: $\dot{\boldsymbol{L}} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{M} \neq 0$. Det behövs ett moment för att en kropp skall rotera så.

Hur vet jag vilka axlar kroppen "gillar"? (Huvudtröghetsaxlar.)

Symmetri — ⟨fig36⟩.

⟨fig37⟩ ⟨fig38⟩