Övning 2006–05–08

Extra 25

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Prediktor: Euler framåt: $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k) = y_k - h\, y_k^2$ (explicit, 1-stegs).

Korrektor: Euler bakåt: $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - h\, y_{k+1}^2$ (implicit, 1-stegs).

$$y_{k+1}^{[0]} = y_k - h\, y_k^2$$

$$y_{k+1}^{[n]} = y_k - h\left(y_{k+1}^{[n-1]}\right)^2$$

$n = 0.1 \Longrightarrow y_0 = y(0) = 1.$

Prediktor $\Rightarrow y_1^{[0]} = y_0 - 0.1\, y_0^2 = 1 - 0.1 = 0.9.$

Korrektor: $y_1^{[1]} = 1 - 0.1\left(y_1^{[0]}\right)^2 = 0.919$, $y_1^{[2]} = 1 - 0.1\left(y_1^{[1]}\right)^2 = 1 - 0.1\,(0.919)^2 = 0.9155439$, $y_1^{[3]} = 0.9161779...$, $y_1^{[4]} = 0.9160618...$ Till konvergens.

Fixpunktsiteration. $\Phi(x) = 1 - 0.1x^2 \Longrightarrow \Phi'(x) = -0.2\,x, x \approx 0.92 \Longrightarrow |\Phi'(x)| \approx 0.2 < 1$ konvergent.

Extra 26

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -100 & -1 \\ -1 & 3 & 10^4 \end{pmatrix}$$

Euler framåt: $\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{y}_k + h\, A\, \boldsymbol{y} = (I + h\, A)\, \boldsymbol{y}_k$.

En metod är stabil om lösningarna är begränsade.

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = (I + h\, A)\, \boldsymbol{y}_k = (I + h\, A)^2 \boldsymbol{y}_{k-1} = (I + h\, A)^{k+1}\, \boldsymbol{y}_0$$

$\|(I + h\, A)^k\|$ begränsad om $I + h\, A$ har egenvärden λ: $|\lambda| \leqslant 1$.

Om A har egenvärdet $\lambda \Rightarrow (I + h\, A)$ har egenvärdet $(1 + h\, \lambda)$.

A:s egenvärden:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -100 & -1 \\ -1 & 3 & 10^4 \end{pmatrix} = 10^4 \begin{pmatrix} -0.0001 & 0.0001 & 0.0002 \\ 0.0002 & -0.01 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0003 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx 10^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det minsta egenvärdet $\approx -10^4$.

$$|1 - h \cdot 10^4| \leqslant 1 \Longrightarrow h \leqslant \frac{2}{10^4}$$

Heath 9.9 Heuns metod:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h\, f(t_k, y_k))\right]$$

a) Felordning: 2 (se Heath 9.10).

b) Enstegsmetod.

c) Explicit.

d) "selfstarting" Ja. (Vi kan sätta in begynnelsevärdet direkt och köra.)

e) Stabil?

Betrakta modellproblemet $y' = \lambda\, y$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[\lambda\, y_k + \lambda(y_k + h\,\lambda y_k)\right] = y_k\left(1 + h\,\lambda + \frac{h^2\,\lambda^2}{2}\right) = \cdots$$

$$= \left(1 + h\,\lambda + \frac{(h\,\lambda)^2}{2}\right)^{k+1} y_0$$

begränsad om

$$\left|1 + \lambda\, h + \frac{(\lambda\, h)^2}{2}\right| \leqslant 1$$

Huruvida den är stabil beror på h. Om $\lambda > 0$ kan vi inte få stabilitet.

f) En "Runge-Kutta"-metod.

g) Nej. Ingen Runge-Kutta metod lämpar sig för styva problem.

Heath 9.1

1. Noggrannheten (felordning).

2. Stabiliteten.

Testa på $y' = \lambda\, y$. Heun: se 9.9.

Globalt fel har felordning 1 lägre än "lokala" felet, dvs felet/steg.

Betrakta 1 steg. Exakt lösning:

$$y(a) = y_0$$

$$y(a+h) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda h} = y_0\left(1 + \lambda\, h + \frac{(\lambda\, h)^2}{2} + \frac{(\lambda\, h)^3}{6} + \cdots\right)$$

Ur 9.9, 1 steg Heun:

$$y(a+h) \approx y_0\left(1 + h\,\lambda + \frac{(\lambda\, h)^2}{2}\right) = y_1$$

Skillnaden är $\mathcal{O}(h^3)$, metodens felordning är 2.

Stabiliteten:

A. Metoden ska vara stabil.

B. Problemet ska vara stabilt. Stabilt om $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.

A:

$$\left|1 + \lambda\, h + \frac{(\lambda\, h)^2}{2}\right| \leqslant 1$$

Definierar $\lambda\, h = z \in \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}\, v$. $\quad x, v \in \mathbb{R}$.

$$1 \geqslant \left|1 + \lambda\, h + \frac{(\lambda\, h)^2}{2}\right| = \left|1 + x + \mathrm{i}\, v + \frac{(x + \mathrm{i}\, v)^2}{2}\right| =$$

$$= \left|1 + x + \mathrm{i}\, v + \frac{x^2 - v^2 + 2\,\mathrm{i}\, x\, v}{2}\right| = \sqrt{\left(1 + x + \frac{x^2 - v^2}{2}\right)^2 + (v + x\, v)^2}$$