

Övning 2006–05–03

Heath 5.6 Betrakta $f(x) = x^2 - y = 0$. Välj $y = 3$. ($x = \pm \sqrt{y}$)

“Fixpunktsmetoden”: $f(x) = 0 \iff x = \varphi(x)$; $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ är lokalt konvergent om $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ “nära lösningen”.

a) Med $\varphi(x) = y + x - x^2$ har vi $\varphi'(x) = 1 - 2x$. Men nära $\sqrt{3}$: $|1 - 2\sqrt{3}| > 1$.

b) Med $\varphi(x) = 1 + x - \frac{x^2}{y}$ har vi $\varphi'(x) = 1 - \frac{2x}{y}$, $y = 3$ ger $|1 - \frac{2x}{3}| \approx |1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}| \leq 0.16 < 1$. OK.

c) $\varphi(x)$ som Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \varphi(x_k)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 3}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{x} \right)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) \approx 0 \quad \text{nära } \sqrt{3}$$

Extra 2 “Newton” på $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $f'(x) = 2x - 2$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2x_k + 1}{2x_k - 2} = x_k - \frac{x_k - 1}{2} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{2}$$

Start i $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= 0.75 \\ x_3 &= 0.875 \\ x_4 &= 0.9375 \end{aligned}$$

Hur bra är det?

Här (fusk): Feluppskattning:

Taylorutveckling:

$$f(x^* + h) = f(x^*) + h f'(x^*) + \frac{h^2}{2!} f''(x^*)$$

Ty $f''(x) = 2$, högre derivator är noll. Med $h = x_4 - x^*$:

$$f(x_4) = 0 + (x_4 - x^*) \cdot f'(x^*) + \frac{(x_4 - x^*)^2}{2} \cdot 2$$

$f'(x^*) = 0$, ty dubbelt nollställe. $f(x_4) = (x_4 - x^*)^2$.

$$|x_4 - x^*| \leq 0.0625$$

Annars:

$$|x_k - x^*| \lesssim \left| \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right|$$

$$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon) < 0$$

Extra 3 Newton har linjär konvergens för dubbla nollställen.

Betrakta Taylorutveckling av $f(x)$ och Newtons metod. Söker dubbelt nollställe x^* : $f(x^*) = 0$.

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k) f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2} f''(\xi_k)$$

Newton:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &\implies f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) = -f(x_k) \\ -f(x_k) &= (x^* - x_k) f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2} f''(\xi_k) \end{aligned}$$

dvs:

$$f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) = (x^* - x_k) f'(x_k) + f''(\xi_k) \frac{(x^* - x_k)^2}{2}$$

$$f'(x_k) (x_{k+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x_k - x^*)^2$$

Gäller alltid. Om dubbelrot: $f'(x^*) = 0$. Enligt medelvärdessatsen:

$$f'(x_k) - f'(x^*) = f''(\zeta_k) (x_k - x^*)$$

$$f'(x_k) = f''(\zeta_k) (x_k - x^*)$$

dvs om dubbelt nollställe.

$$f''(\zeta_k) (x_k - x^*) (x_{k+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_k)}{2} (x_k - x^*)^2$$

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_k)}{f''(\zeta_k)} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } x_k \rightarrow x^* \quad (\zeta_k \rightarrow x^*, \xi_k \rightarrow x^*)$$

Heath 5.9

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 = x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 = x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Heath 5.13

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}: \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 x_1 - 1 \end{cases}$$

Newton: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$ där $J(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$, i vårt fall

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^{(k)} = - \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_1 x_2 - 1 \end{pmatrix}^{(k)}$$

Om vi startar med $x_1 = 0 \implies J$ singulär $\implies$ kass!

Om $x_1 \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2^{(k)} & x_1^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - 1 \\ x_1^{(k)} x_2^{(k)} - 1 \end{pmatrix}$$

eller: rad 1: $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - x_1^{(k)} + 1 = 1$; rad 2: $x_1^{(k)}(x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}) = 1 - x_2^{(k)}x_1^{(k+1)}$.

Start i $x_1^{(0)}$: $x_1^{(1)} = 1$ klar.

$$x_2^{(1)} = \left(1 - x_2^{(0)} \cdot 1 + x_1^{(0)} \cdot x_2^{(0)}\right) / x_1^{(0)} = A$$

Efter ett steg. Efter nästa steg:

$$x_2^{(2)} = (1 - A + A) \cdot 1 = 1$$

Klart efter andra steget.