Övning 2006–04–26

Låt x vara det exakta värdet, $\hat{x}$ vara närmevärde.

$\hat{x} - x$: absolut fel

$\frac{\hat{x} - x}{x}$, $x \neq 0$: relativt fel. Ofta approximeras med $\frac{\hat{x} - x}{x} \approx \frac{\hat{x} - x}{\hat{x}}$.

$$|\hat{x} - x| \leqslant A: \quad \text{felgräns}$$

$$\frac{|\hat{x} - x|}{|x|} \leqslant B: \quad \text{felgräns}$$

Heath 1.2

b) $x = \pi$, $\hat{x} = 3.14$. Gräns för absolut fel:

$$|3.14 - \pi| \leqslant 0.00160$$

Mäter antal decimaler. Gräns för relativt fel

$$\frac{|3.14 - \pi|}{|\pi|} \leqslant 0.00506 = 0.507 \cdot 10^{-3}$$

3 siffrors noggranhet: $|\text{relfel}| \lesssim 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Heath 1.4 “Felfortplantningsformeln”

$$|\Delta f| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\max} |\Delta x|$$

Med $f(x) = \sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Gräns för:

a) Absolut fel i $\sin(x)$: $|\Delta f| \leqslant |\cos x| \cdot |\Delta x| = |\cos x|\, h \leqslant 1 \cdot h$, t.ex. för x “nära” 0.

b) Relativa felet:

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} \leqslant \frac{|\cos x| \cdot |h|}{|\sin x|} = |\cot x|\, h$$

stort om $x \approx 0$.

c) Konditionstalet:

$$\left|\frac{\text{relativa felet i utdata}}{\text{relativa felet i indata}}\right| \leqslant \frac{\left|\frac{\cos x}{x}\right| \cdot |h|}{\frac{|h|}{x}} = \frac{|\cos x| \cdot |x|}{|\sin x|}$$

$\approx |\cos x|$ om $x \approx 0$. Är stort om $\sin(x) \approx x, x \not\approx 0$.

Heath 1.6 “framåt analys”, “bakåt analys”.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

a) Ersätt $\sin(x)$ med x.

I framåtanalys:

$$x = 0.1: \quad |\sin 0.1 - 0.1| \leqslant 1.7 \cdot 10^{-4}$$

II bakåtanalys: $x = 0.1 = $ vårt svar. Vilket y: $\sin(y) = 0.1$?

$$y = \arcsin(0.1) = 0.1002$$

$$|y - 0.1| \leqslant 0.002$$

b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} = z$. Med $x = 0.5$.

Framåtanalys:

$$|\sin(0.5) - z(0.5)| = \left|\sin(0.5) - 0.5 + \frac{0.5^3}{6}\right| \leqslant 2.59 \cdot 10^{-4}$$

Bakåtanalys:

$$\sin(y) = z(0.5) = 0.5 - \frac{0.5^3}{6} \Rightarrow y = 0.4997...$$

dvs $|0.5 - 0.4997....| \leqslant 2.95 \cdot 10^{-4}$.

Heath 1.12

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Hur "bra" är dessa uttryck vid datorberäkningar?

1. $x^2 - y^2$ är vårt exakta värde. Vi får

$$\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x^2) - \mathrm{fl}(y^2))$$

vilket ger

$$(x^2(1 + \varepsilon_1) - y^2(1 + \varepsilon_2))(1 + \varepsilon_3) = \widehat{x^2 - y^2}$$

$$\approx x^2 - y^2 + x^2\varepsilon_1 + y^2\,\varepsilon_2 + (x^2 - y^2)\,\varepsilon_3$$

$$\left|x^2 - y^2 - \widehat{x^2 - y^2}\right| \approx x^2|\varepsilon_1| + y^2|\varepsilon_2| + |x^2 - y^2|\,|\varepsilon_3| \leqslant x^2\mu + y^2\mu + |x^2 - y^2|\mu = \mu(x^2 + y^2 + |x^2 - y^2|)$$

Absolut fel:

$$\left|x^2 - y^2 - \widehat{x^2 - y^2}\right| \lesssim \mu\big(x^2 + y^2 + \left|x^2 - y^2\right|\big)$$

Relativt fel:

$$\frac{\left|x^2 - y^2 - \widehat{x^2 - y^2}\right|}{|x^2 + y^2|} \lesssim \mu\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)$$

2. $(x + y)(x - y)$

$$\widehat{(x + y)(x - y)} = \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x + y) \cdot \mathrm{fl}(x - y)) =$$

$$= ((x + y)(1 + \varepsilon_{\mathrm{I}})(x - y)(1 + \varepsilon_{\mathrm{II}}))(1 + \varepsilon_{\mathrm{III}}) =$$

$$= (x + y)(x - y)(1 + \varepsilon_{\mathrm{I}})(1 + \varepsilon_{\mathrm{II}})(1 + \varepsilon_{\mathrm{III}}) \approx$$

$$\approx (x + y)(x - y)(1 + \varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}})$$

Absolut fel:

$$\left|(x+y)(x-y)-\widehat{(x-y)(x+y)}\right| \lesssim |(x+y)(x-y)|\cdot 3\mu$$

Relativt fel:

$$\frac{\left|(x+y)(x-y)-\widehat{(x-y)(x+y)}\right|}{|(x+y)(x-y)|} \lesssim 3\mu$$

I formel 1 är det relativa felet stort om $x \approx y$. Formel 2 är inte alltid bäst.

Heath 1.16 MATLAB: dubbelprecision enligt IEEE-standard.

$$(\beta, t, L, U) = (2, 53, -1022, 1023)$$

Runt nollan ligger talen tätast och glesast för tal med stor exponent.

1. Tätast (minsta avstånd mellan två flyttal). Minsta talet (när man bortser från *gradual underflow*) är till belopp $1.\bar{0} \cdot 2^{-1022}$. Näst minsta är $1.000...01 \cdot 10^{-1022}$. Skillanden är $0.00...01 \cdot 2^{-1022} = 2^{-1074}$.

2. Glesast: Största talet: $2^{1024}(1-2^{-53})$. Näst störst: $2^{1024}(1-2^{-52})$. Skillnad $2^{971} \approx 2 \cdot 10^{292}$.

Newtons metod: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $x_k \to x^*$: $f(x^*) = 0$. Newton har "kvadratisk" konvergens.

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \approx C = \text{konstant}$$

Heath 5.3

a) $f(x) = x^2 - y = 0$. $\quad (x = \sqrt{y})$.

Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2\,x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{y}{x_k}\right)$$

Hur många gånger p måste vi iterera, om x_p: $|x_p - x^*| \leqslant 0.5 \cdot 2^{-24}$? Vi startar i x_0: $|x_0 - x^*| \leqslant 0.5 \cdot 2^{-4}$.

Efter p steg (med kvadratisk konvergens):

$$\left(0.5 \cdot 2^{-4}\right)^{2^p} \leqslant 0.5 \cdot 2^{-24}$$

$p = 1$: 2^{-10}, $p = 2$: 2^{-20}...