Övning 2006–04–06

Lay 7.3.1 Find the change of variable $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ that transforms the quadratic form $\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x}$ into $\boldsymbol{y}^T D\,\boldsymbol{y}$ as shown.

$$5\,x_1^2 + 6\,x_2^2 + 7\,x_3^2 + 4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2\,x_3 =$$

$$= \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

Med MATLAB: `[P, D] = eig(A)`. Vi får

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

det vill säga

$$\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\left(P D\,P^T\right)\boldsymbol{x} = \left(P^T\boldsymbol{x}\right)^T D\left(P^T\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{y}^T D\,\boldsymbol{y}$$

Lay 7.3.3 $Q(\boldsymbol{x}) = 5\,x_1^2 + 6\,x_2^2 + 7\,x_3^2 + 4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2\,x_3$, sök max då $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$.

$$\max_{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1}\left(\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x}\right) = \max_{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}=1}\left(\boldsymbol{y}^T D\,\boldsymbol{y}\right)$$

Två-normen är invariant under en ortogonal transformation.

$$\max_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1}\left(9\,y_1^2 + 6\,y_2^2 + 3\,y_3^2\right) = 9\;(\text{för } y_1 = 1;\, y_2 = y_3 = 0)$$

b) Vilket $\boldsymbol{x}$ ger 9:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Största $Q(\boldsymbol{x})$ för $\boldsymbol{x}$ vinkelräta mot ovan.

ANMÄRKNING: 9 fick vi för $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 6 fick vi för $\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{y}_2 \perp \boldsymbol{y}_1$.

Lay 7.3.11 $\boldsymbol{x}$ är egenvektor till A sådan att $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$:

$$\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\lambda\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \lambda = 3$$

Lay 7.4.11 Vi har

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Sök $A = U\Sigma\,V^T$. Givet:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ortonormerade egenvektorer till $A\,A^T$. V ur de ortonormerade egenvektorerna till $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$$

har $\lambda_1 = 90, \lambda_2 = 0$.

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = U\,\Sigma\,V^T \Longrightarrow \Sigma = U^T A\,V = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \text{ är } + \sqrt{\text{egenvärde till } A^T A}$$

Lay 7.4.17 A kvadratisk, A^{-1} existerar. Med $A = U\,\Sigma\,V^T$, sök A^{-1}.

$$\exists A^{-1} \Longrightarrow A\text{:s egenvärden} \neq 0$$

$$\exists \left(A^T A\right)^{-1}. \quad A^T A\text{: s egenvärden} \neq 0$$

$$\Longrightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix}; \sigma_k > 0 \forall k$$

Vi har att Σ^{-1} existerar:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

$$(U\,\Sigma\,V^T)^{-1} = \left(V^T\right)^{-1} \Sigma^{-1}\,U^{-1} = V\,\Sigma^{-1}\,U^T$$

SVD

Heath 3.30 Med en matris $A = \boldsymbol{a} = [a_1 \quad \dots \quad a_n]^T$. A:s svd?

$$A = U\,\Sigma\,V^T$$

V: egenvektorer till $A^T A = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$. $\Longrightarrow V$ en 1×1-matris: $V = [1]$.

$$[\|\boldsymbol{a}\|_2^2] \Longrightarrow \sigma_1 = \|\boldsymbol{a}\|_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\,1\,) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\,1\,) = \sigma_1\,\boldsymbol{u}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|_2}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|_2} & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\,1\,)$$

b) Om $A = [a_1 \quad \dots \quad a_n]$. Om

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = U\,\Sigma\,V^T \Longrightarrow A = \left(U\Sigma\,V^T\right)^T = \left(\,1\,\right)\left(\,\sigma_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0\,\right)\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{a}^T}{\|\boldsymbol{a}\|_2} \\ \boldsymbol{u}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^T \end{pmatrix}$$

Heath 3.34 "pseudoinvers". Med

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

är Σ^+ pseudoinversen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$k_j = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_j} & \text{om}\,\sigma_j \neq 0 \\ 0 & \text{om}\,\sigma_j = 0 \end{cases}$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sök A^+ ur $A = U\,\Sigma\,V^T \Longrightarrow A^+ = V\,\Sigma^+\,U^T$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A\,A^T \Longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Eftersom det här är en diagonalmatris måste både U och V vara enhetsmatrisen.

$$A^T A = A\,A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^+ = V\,\Sigma\,U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

ANMÄRKNING: $\|B\|_2 = \max\left|\sqrt{|\mu|}\right|$ där μ är egenvärde till B^TB.

4.14 Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Ja, $\alpha = 0 \Longrightarrow$ triangulär matris med $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

b) α reellt. Nej. Minst ett reellt nollställe till karakteristiska polynomet.

4.24 a) A har rangen ett. $\Rightarrow \exists$ kolonn $\boldsymbol{u}$ i $A \neq \boldsymbol{0} \Longrightarrow A = [v_1\,\boldsymbol{u}, v_2\,\boldsymbol{u}, ..., v_n\,\boldsymbol{u}]$. Ej alla $v_k = 0 \Longrightarrow A = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$.

b) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}$ egenvärde till A ty $A\,\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}) = \lambda\,\boldsymbol{u}$.

c) Resten: $\lambda_k = 0$

d) Potensmetoden: Starta i $\boldsymbol{x}_0$. Bilda en bas: $\{\boldsymbol{u}$, och $n-1$ st ytterligare $\boldsymbol{u}_k\}$.

$$\boldsymbol{x}_0 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\,\boldsymbol{u}_k + \alpha_1\,\boldsymbol{u}$$

$$A\,\boldsymbol{x}_0 = A\sum_{k=2}^{n} \alpha_k\,\boldsymbol{u}_k + \alpha_1\,\boldsymbol{u} = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\,A\,\boldsymbol{u}_k + \alpha_1 A\,\boldsymbol{u} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} a_k\,\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}_k\big) + \alpha_1\,A\,\boldsymbol{u} = \text{Laban}\cdot\boldsymbol{u}$$

Klart efter en iteration.