Övning 2006–04–05

Lay 5.7.1 Tillämpning på $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$. Vi har

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\,\boldsymbol{x}$$

A är en 2×2-matris med:

$$\lambda_1 = 4, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har 2 olika egenvärden $\Longrightarrow$ Lösning:

$$\boldsymbol{x} = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\boldsymbol{v}_2 = c_1\,\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Om $\boldsymbol{x}(0) = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\,\mathrm{e}^0\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5}{2} \\ c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

dvs:

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lay 5.7.19 i exempel 1:

$$R_1 = \frac{1}{5}\,\Omega; \quad R_2 = \frac{1}{3}\,\Omega; \quad c_1 = 4\,\mathrm{F}; \quad c_2 = 3\,\mathrm{F}$$

Initialspänning 4 V. Vår differentialekvation:

$$\boldsymbol{V}' = \begin{pmatrix} -\frac{5+3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{V} = A\,\boldsymbol{V}$$

Egenvärden och egenvektorer till A:

$$\lambda_1 = -2.5, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -0.5 \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-2.5t}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-0.5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Initialspänningen $\boldsymbol{V}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{2} \\ c_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Lay 5.7.9 $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$; komplexa egenvärden.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \mathrm{i} = a \pm \mathrm{i}\,b$$

Tillhörande egenvektorer. Till $\lambda_1 = -2 + \mathrm{i}$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$. Till $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allmän lösning:

$$\boldsymbol{x}(t) = d_1\,\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} + d_2\,\mathrm{e}^{(-2-\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sök den reella lösningen.

$$\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t} = \mathrm{e}^{at}(\cos b\,t + \mathrm{i}\sin b\,t)$$

Med $a = -2, b = +1$: enligt Lay, sid 359, består vår lösning av två delar, $\boldsymbol{y}_1$ och $\boldsymbol{y}_2$ där

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{at}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \cos(b\,t) - \mathrm{Im}(\boldsymbol{v})\sin(b\,t))$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \mathrm{e}^{at}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \cdot \sin(b\,t) + \mathrm{Im}(\boldsymbol{v})\cos(b\,t))$$

Vi får:

$$d_1\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(b\,t) + \sin(b\,t) \\ \cos(b\,t) + 0 \end{pmatrix} + d_2\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(b\,t) - \cos(b\,t) \\ \sin(b\,t) - 0 \end{pmatrix}$$

Vad är detta för kurva? Ur egenvärdena:

1. Komplexa $\Longrightarrow$ spiral.
2. Negativ realdel $\Longrightarrow$ "inåtgående" spiral

Lay 7.1.17 Sök P, D: $P^T A\,P = D$, där D är en diagonal matris.

$$P^T P = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2$$

I MATLAB: `[ V, D ] = eig(A)`. V blir:

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

I Mathematica: `Eigensystem[A]`.

$$P^T A\,P = D$$

$$A\,P = P D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \lambda_3\boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$

Dvs

$$V^T A V = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lay 7.1.27 A äre en symmetrisk $n \times n$-matris, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B\text{: symmetri}$$

$$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$$

$$(B B^T)^T = B B^T$$

Lay 7.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x_1 + \frac{x_2}{3} \\ \frac{x_1}{3} + x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \left(5 x_1 + \frac{x_2}{3}\right) + x_2 \left(\frac{x_1}{3} + x_2\right) = 5 x_1^2 + \frac{2}{3} x_1 x_2 + x_2^2$$

Lay 7.2.3.a $10 x_1^2 - 6 x_1 x_2 - 3 x_2^2$: $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $5 x_1^2 + 3 x_1 x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Lay 7.2.7 Sök P: $\boldsymbol{x} = P \boldsymbol{y}$ sådan att $x_1^2 + 10 x_1 x_2 + x_2^2 \Longrightarrow a y_1^2 + b y_2^2$.

1. Vår form: $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisera A.

2. A:s egenvärden (symmetrisk matris: har två *reella* egenvärden).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

(Summan av egenvärdena är summan av diagonalelementen.)

3. A:s egenvektorer, till $\lambda_1 = 6 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_2 = -4 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A kan diagonaliseras:

$$P^T A\, P = D \Longleftrightarrow A = P D\, P^T$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Vår kvadratiska form: $x_1^2 + 10\, x_1\, x_2 + x_2^2 = \boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} =$

$$= \boldsymbol{x}^T P D\, P^T \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}^T P\right) D\, \left(P^T \boldsymbol{x}\right) = \left(P^T \boldsymbol{x}\right)^T D\, \left(P^T \boldsymbol{x}\right)$$

[på grund av att man ortonormerar P: s kolonner: $P^T P = I \Longrightarrow P = P^{-1}$]

Sätt $\boldsymbol{y} = P^T \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} = 6\, y_1^2 - 4\, y_2^2$$

Lay 7.2.9 $3\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 + 6\, x_2^2 = \boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

A har egenvärden $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. Positiva egenvärden: positivt definit kvadratisk form.

Lay 5.8.1 Efter 4 gånger fås:

$$\boldsymbol{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3326 \end{pmatrix}$$

med egenvärde ur

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.3326 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9978 \\ 1.6652 \end{pmatrix} = 4.9978 \begin{pmatrix} 1 \\ ? \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 \approx 5.0$$