2006–04–03

Lay 5.3.1 Givet $A = PDP^{-1}$:

$$A^4 = (PDP^{-1})^4 = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots = PD^4P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 226 & -525 \\ 90 & -209 \end{pmatrix}$$

Lay 5.3.7 Försök att diagonalisera A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$AP = P \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Med } P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}\text{:} \quad \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\boldsymbol{p}_1 & d_2\boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$$

Dvs om diagonaliserbart är d_1 och d_2 egenvärden med $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ som tillhörande egenvektor **och** $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ är linjärt oberoende.

A är triangulär $\implies A$:s egenvärden står i diagonalen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. (Egenvektorer till *olika* egenvärden är linjärt oberoende.)

$$A\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x}\text{:} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{tar } \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = -1 \cdot \boldsymbol{x} \implies \boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{tar } \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

5.3.23 Ja. Ty egenvektorer till *olika* egenvärden är linjärt oberoende.

SATS: Om dimensionen på egenrummet är lika med matrisens ordning är matrisen diagonaliserbar.

5.3.27 Vi vet att $A = PDP^{-1}$ och att

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1}$$

Om D^{-1} existerar:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

om det går, dvs $\lambda_k \neq 0$ för alla k.

Och A^{-1} existerar $\Longrightarrow \det(A) \neq 0$. $\det(A - 0\,I) \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ är ej ett egenvärde $\Longrightarrow$ "vårt" D^{-1} existerar, och då är A^{-1} diagonaliserbar.

5.4.1 Med basen $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ och $D = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\}$ till V respektive W och en linjär avbildning $T: V \to W$:

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{b}_1) = 3\,\boldsymbol{d}_1 - 5\,\boldsymbol{d}_2 \\ T(\boldsymbol{b}_2) = -\,\boldsymbol{d}_1 + 6\,\boldsymbol{d}_2 \\ T(\boldsymbol{b}_3) = 4\,\boldsymbol{d}_2 \end{cases}$$

Ge matrisen som representerar T:

$$[T(\boldsymbol{b}_1) \quad T(\boldsymbol{b}_2) \quad T(\boldsymbol{b}_3)] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

11 Med matrisen A: $\boldsymbol{x} \mapsto A\,\boldsymbol{x}$, avbildning med avseende på $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Med en annan bas $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, vad har vi då för matris B för samma avbildning? Vi har

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Med avseende på $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, "kolla" vad som händer med $\boldsymbol{b}_1$ och $\boldsymbol{b}_2$.

$$A\,\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\,\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Med avseende på $\boldsymbol{b}_1$ och $\boldsymbol{b}_2$:

$$B\,\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B\,\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompaktare:

$$A \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{pmatrix} B$$

$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

5.4.19 Vi har $A = P\,B\,P^{-1}$ ("A similärt ekvivalent med B") och $\exists A^{-1}$.

Med $P^{-1}\,A\,P = B$. Betrakta $P^{-1} A\,P$:

$$\left(P^{-1}\,A\,P\right)^{-1} = P^{-1}\,A^{-1}\,P$$

ty $\exists A^{-1}$. $\Longrightarrow \exists B^{-1}$ och $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$.

5.5.1 Vi har

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}=2\pm\mathrm{i}$$

Tillhörande egenvektorer:

$$A\,\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1\colon\quad (A-\lambda_1 I)\,\boldsymbol{v}_1=\mathbf{0}\colon\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1-2-\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 1 & 3-2-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

Med $v_2=1 \Longrightarrow v_1=1+\mathrm{i} \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogt $A\,\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\,\boldsymbol{v}_2 \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anmärkning: $A\,\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1 \Longrightarrow A\,\bar{\boldsymbol{v}}_1=\bar{\lambda}_1\,\bar{\boldsymbol{v}}_1$

5.5.7 Givet

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

A är en transformation som är både en rotation och en skalning. En rotation-skalnings-matris C:

$$C=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Här är r skalningsfaktorn, φ rotationsvinkeln. $r=\sqrt{a^2+b^2}=2$. C:s egenvärden är $a\pm\mathrm{i}\,b$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \sin\varphi=\frac{1}{2} \\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

5.5.13 Skriv A som PCP^{-1}, samma A som ovan.

$$A=PDP^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$$

Se sats 9: Om $A = P\,C\,P^{-1}$; $P = [\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{v}_2)\quad \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}_2)]$, $C = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_2) & \mathrm{Im}(\lambda_2) \\ -\mathrm{Im}(\lambda_2) & \mathrm{Re}(\lambda_2) \end{smallmatrix}\right)$. (Med $\boldsymbol{v}_2$ som $\boldsymbol{v}$ eftersom λ_2 har negativ realdel.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -(-1) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

6.6.1 A är en 2×2-matris med

$$\lambda_1 = 3, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilda $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\,\boldsymbol{x}_k$: $\boldsymbol{x}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\boldsymbol{x}_1 = ?$

$$A = P\,D\,P^{-1} = (\ \boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ ) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\ \boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ )^{-1}$$

$\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende. $\boldsymbol{x}_0$ kan skrivas $x_1\,\boldsymbol{v}_1 + x_2\,\boldsymbol{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = 5\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,\boldsymbol{v}_2$$

$$A\,\boldsymbol{x}_0 = A\,(5\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,\boldsymbol{v}_2) = 5A\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,A\,\boldsymbol{v}_2 = 15\,\boldsymbol{v}_1 - \frac{4}{3}\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 49/3 \\ 41/3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_k = A\,\boldsymbol{x}_{k-1} = A^2\,\boldsymbol{x}_{k-2} = \ldots = A^k\,\boldsymbol{x}_0 = A^k(5\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,\boldsymbol{v}_2) = 5\,A^k\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,A^k\,\boldsymbol{v}_2 =$$

$$= 5\,\lambda_1^k\,\boldsymbol{v}_1 - 4\,\lambda_2^k\,\boldsymbol{v}_2 = 5 \cdot 3^k \cdot \boldsymbol{v}_1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \boldsymbol{v}_2$$