Övning 2006–03–27

Minsta-kvadrat-metoden. Minimera $\|A\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$ för överbestämt system $A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

För handräkning: normalekvationerna $A^T A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

6.1 Anpassa $y=\beta_0+\beta_1 x$ till indata:

x	0	1	2	3
y	1	1	2	2

2 obekanta: β_0 och β_1 och 4 villkor.

$$\begin{cases} \beta_0+0\cdot\beta_1=1 \\ \beta_0+1\cdot\beta_1=1 \\ \beta_0+2\cdot\beta_1=2 \\ \beta_0+3\cdot\beta_1=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_0=0.9 \\ \beta_1=0.4 \end{cases}$$

Det vill säga, linjnen $y=0.9+0.4\,x$.

$A\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ är residualvektorn

$$A\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ +0.3 \\ -0.3 \\ +0.1 \end{pmatrix}$$

6.6.5 Vi vill bestämma en rät linje mot mätvärden: minst två punkter skall ha olika x-koordinater. $\Longrightarrow A^T A$ är icke-singulär.

Bevis. Designmatrisen $\beta_0+\beta_1\,\boldsymbol{x}$:

$$A \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{blir} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

Kolonner i A är linjärt beroende $\Longrightarrow x_i=x_k \forall i,k$. Men vi har minst två olika linjärt oberoende kolonner: Sats 14 $\Longrightarrow \det(A^T A)\neq 0$. □

6.6.9 Anpassa $y=A\cos x+B\sin x$ till tabellen.

[Icke linjära minsta-kvadrat-anpassningar i MATLAB: `lsqnonlin(...)`]

Det överbestämda systemet blir

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x_1) & \sin(x_1) \\ \cos(x_2) & \sin(x_2) \\ \cos(x_3) & \sin(x_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Fortsätt!

Skalärprodukter i linjära rum

6.7.1 Enligt exempel 1 är vår skalärprodukt:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 4\,x_1\,y_1 + 5\,x_2\,y_2$$

Med

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) sök $\|\boldsymbol{x}\|, ||\boldsymbol{y}\|, |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2$:

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 4 \times 1 \times 1 + 5 \times 1 \times 1 = 9 \Longrightarrow \|\boldsymbol{x}\| = 3$$

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = 4\,(25) + 5\,(1) = 105 \Longrightarrow \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{105}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 4 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot (-1) = 15 = 15 \Longrightarrow |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 = 225$$

b) Om $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{y} \Longrightarrow \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$; med $\boldsymbol{z} = [z_1 \quad z_2]^T$.

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle = 4\,z_1 \cdot 5 + 5\,z_2 \cdot (-1) = 20\,z_1 - 5\,z_2$$

Dvs $20\,z_1 - 5\,z_2 = 0$; med $z_1 = t \Longrightarrow z_2 = 4\,t$:

$$\boldsymbol{z} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6.7.3 Vårt rum: $\mathbb{P}_2 = \{\text{polynom av grad } \leqslant 2\}$. $p, q \in \mathbb{P}_2$: vår skalärprodukt:

$$\langle p, q \rangle = p(t_0) \cdot q(t_0) + p(t_1) \cdot q(t_1) + p(t_2) \cdot q(t_2)$$

$$\begin{cases} t_0 = -1 \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p(t) = 4 + t \\ q(t) = 5 - 4\,t^2 \end{cases}$$

$$\langle p, q \rangle = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 28$$

6.7.7 Fortsättning från 6.7.3.

Projektion q_p av q på det underrum som spänns av p.

$$q_p = \frac{\langle p, q \rangle}{\langle p, p \rangle}\,p = \frac{28}{50}p = \frac{14}{25}(4 + t)$$

Kontroll $\langle q - q_p, p\rangle \overset{!}{=\!=} 0$.

6.7.9 Vår skalärprodukt $\langle p, q\rangle = p(t_1)\cdot q(t_1) + p(t_2)\cdot q(t_2) + p(t_3)\cdot q(t_3) + p(t_4)\cdot q(t_4)$

$$\begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \\ t_3 = 1 \\ t_4 = 3 \end{cases}$$

Med $p_0(t) = 1$; $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$. Sök projektionen av p_2 på $W = \mathrm{Span}\{p_0, p_1\}$. "Vi har en lätt formel för projektioner om $p_0 \perp p_1$":

$$\langle p_0, p_1\rangle = 1\cdot(-3) + 1\cdot(-1) + 1\,(+1) + 1\,(+3) = 0$$

De var vinkelräta. Då blir projektionen av p_2:

$$p_{2_{\text{proj}}} = \frac{\langle p_2, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 + \frac{\langle p_2, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 = \frac{9+1+1+9}{4}\cdot(1) + \frac{9(-3)+1(-1)+9(3)}{9+1+1+9}\cdot(t) =$$

$$= 5 + 0\cdot t = 5$$

b) Sök en ortogonal bas till $\mathrm{Span}\{p_0, p_1, p_2\}$.

p_0 och p_1 är vinkelräta. Vi har projektionen $p_{2_{\text{proj}}} = 5$: $q = p_2 - p_{2_{\text{proj}}} = t^2 - 5$. (Jan räknar krångligt med Gram-Schmidt.) $\{p_0,\ p_1,\ q\} = \{1,\ t,\ t^2 - 5\}$ är en ortogonal bas till detta skalärprodukttrum.

6.7.17 $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\,||u+v||^2 - \frac{1}{4}\,||u-v||^2$

Bevis. $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\,\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$.

$\|u-v\|^2 = \langle u, u\rangle - 2\,\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$.

Detta ger då påståendet som: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\,\langle u, v\rangle$. □

2.7.21 $V = \mathcal{C}^0[0,1]$, enligt exempel 7, med f och $g \in V$:

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^1 f(t)\, g(t)\mathrm{d}t$$

Men $f(t) = 1 - 3t^2$ och $g(t) = t - t^3$. Vi får

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 (1 - 3\,t^2)(t - t^3)\mathrm{d}t = \int_0^1 (t - t^3 - 3\,t^3 + 3\,t^5)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} = 0$$