Övning 2006–03–23

Heath 2.18 Vi har $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; utan pivotering: påstående:

$$\nexists L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ och ett } U = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} : L\,U = A$$

$$L\,U = \begin{pmatrix} a\,d & a\,e \\ b\,d & b\,e + c\,f \end{pmatrix} \overset{?}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{1,2} = 1 \Longrightarrow a\,e = 1 \Longrightarrow a \neq 0, e \neq 0$$

$$a_{2,1} = 1 \Longrightarrow b \neq 0, d \neq 0$$

$$a_{1,1} = 0 \quad \text{vilket inte stämmer om } a \neq 0, d \neq 0$$

Anmärkning: Om vi pivoterirar:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gles matris i Matlab:

```
B = sparse(A)
B= (1,1) a_{1,1}
   (1,2) a_{1,2}
     ⋮
```

En matris som är gles har i regel inte en invers som är gles.

Heath 2.25 Med $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ i $\mathbb{R}^n$. Visa att matrisen $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$ har rang $= 1$.

Bevis. $$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{u}\,[v_1, ..., v_n] \Rightarrow$$

varje kolonn i matrisen genereras av $\boldsymbol{u} \neq 0$, ej alla $v_j = 0$: rang $= 1$.

Om A har $\text{rang}(A) = 1 \Longrightarrow \dim(\text{Col}(A)) = 1 \Longrightarrow$ alla kolonner i A genereras av en nollskild vektor $\boldsymbol{u}$, dvs $A = [v_1\boldsymbol{u}, v_2\boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{u}, v_k\boldsymbol{u}, ..., v_n\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}[v_1, ..., 1, ..., v_n] = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$. □

Heath 2.35 Matris $A = B\,B^T$, B icke-singulär $\Longrightarrow A$ är positivt definit.

1) $A^T = \left(B\,B^T\right)^T = B\,B^T = A$ OK. A är symmetrisk.

2) $\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T B\,B^T \boldsymbol{x} = \left(B^T \boldsymbol{x}\right)^T \left(B^T \boldsymbol{x}\right) = \|B^T \boldsymbol{x}\|_2^2 \geqslant 0$ alla $\boldsymbol{x}$ (A "positivt semidefinit")

Om $0 = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \|B^T \boldsymbol{x}\|_2^2 = 0 \Longleftrightarrow B^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ Ett linjärt ekvationssystem som bara har $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ som lösnng eftersom $\det(B^T) \neq 0$.

Extra 7 Vi söker "konditionstalet" till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & (1+\alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

Konditionstalet till A

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

(MATLAB: `cond(A, Inf)`):

$$\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \left(2 + \frac{2}{\alpha}\right) & -\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{3, 4, 2 + \alpha\} = \max\{4, 2 + \alpha\}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{2, \frac{4}{\alpha}, 3 + \frac{4}{\alpha}\right\} = 3 + \frac{4}{\alpha}$$

$$\kappa_\infty(A) = \begin{cases} 4\left(3 + \frac{4}{\alpha}\right) & \text{om } \alpha < 2 \\ (2 + \alpha)\left(3 + \frac{4}{\alpha}\right) & \text{om } \alpha \geqslant 2 \end{cases}$$

Minst om $\alpha = 2$ och då $\kappa_\infty(A) = 20$.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: i datorn $(A + E)(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$.

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \lessapprox \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \left(\frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right) \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \epsilon_{\text{mach}}$$

QR-metoden för lösning av minsta-kvadrat-problem. $Q^T Q = I$.

Lay 6.4.1 Med $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ som nedan, sök en "ortogonalbas" till det rumm som $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ spänner. "Gram-Schmidt".

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Strata med någon, t.ex. $\boldsymbol{u}_1$.

2. Nästa blir:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{15}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \perp \boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \left(\boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{u}_1\right) \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 \frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2} = 0$$

Lay 6.4.5 Med $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ som nedan. Gör en ortogonalisering med Gram-Schmidt.

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med start $\boldsymbol{u}_1 = [1, -4, 0, 1]^T$ blir nästa vektor

$$\boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{36}{18} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{u}}_2 \perp \boldsymbol{u}_1$$

Dessa bildar en ortogonal bas, men inte en ortonormal bas.

Lay 6.4.7 Ur uppgift 3 vick vi en ortogonal bas:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Normeras till en ortonormalbas:

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lay 6.4.11 "Ortogonalisera" $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$: $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt: starta med t.ex. $\boldsymbol{a}_1 = \hat{\boldsymbol{a}}_1$.

$$\hat{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_1}{\hat{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_1} \hat{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \left(\frac{-5}{5}\right) \hat{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_1}{\hat{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_1} \hat{\boldsymbol{a}}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_2}{\hat{\boldsymbol{a}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_2} \hat{\boldsymbol{a}}_2 = \ldots = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(onormerat)

Lay 6.4.13 Gram-Schmidt gav av på samma sätt Q ur A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{6}$$

Sök R: $Q\,R = A$:

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$Q\,R = A \Longrightarrow Q^T Q\,R = Q^T A \Longleftrightarrow R = Q^T A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lay 6.4.15 Enligt uppgift 11: A given, Q blir

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\boldsymbol{a}}_1}{\|\hat{\boldsymbol{a}}_1\|_2} & \frac{\hat{\boldsymbol{a}}_2}{\|\hat{\boldsymbol{a}}_2\|_2} & \frac{\hat{\boldsymbol{a}}_3}{\|\hat{\boldsymbol{a}}_3\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} & \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Q\,R = A$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lay 6.4.19 $A = Q\,R$, A:s kolonner är linjärt oberoende.

$$A_{m\times n}$$

$$Q_{m\times n}$$

$$R_{n\times n}$$

Starta med $R\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Om detta medför $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har vi R icke-singulär, inverterbar.

$$\mathbf{0} = Q\,R\,\boldsymbol{x} = A\,\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]\,\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{a}_n \Longleftrightarrow$$

alla x_j är 0 ty kolonnerna i A är linjärt oberoende.