Övning 2006–03–22

Ur Lay 4.6.1: $A \sim B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se Lay sidan 264. Man får se upp när man tar basvektorer i radrummet: det är inte givet att de två första raderna i A är linjärt oberoende bara för att de första i B är det: det är ju tillåtet med radbyten när man tar fram B.

4.7.3 Tag 2 baser $U = \{U_1, U_2\}$; $W = \{W_1, W_2\}$. Bilda matrisen

$$P = (\ U_{1_W}, U_{2_W}\ )$$

Enligt 4.7.1: $P_{W \leftarrow U} = [U_{1_W} \quad U_{2_W}] \implies$

$$\boldsymbol{x}_W = P_{W \leftarrow U}\, \boldsymbol{x}_U$$

4.7.6 Med 2 baser: $D = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3\}$; $F = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = 2\,\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 \\ \boldsymbol{f}_2 = 3\,\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 \\ \boldsymbol{f}_3 = -3\,\boldsymbol{d}_1 + 2\,\boldsymbol{d}_3 \end{cases}$$

a)

$$P_{D \leftarrow F} = (\ \boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2 \quad \boldsymbol{f}_3\ )_D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observera att de ska skrivas som kolonnvektorer.

b) Med $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_1 - 2\,\boldsymbol{f}_2 + 2\,\boldsymbol{f}_3$.

$$\boldsymbol{x}_D = P_{D \leftarrow F}\boldsymbol{x}_F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lay 4.7.7 2 baser: $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ och $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sök $P_{C \leftarrow B}$.

$$P_{C \leftarrow B} = (\ \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2\ )_C$$

$$[\boldsymbol{b}_1]_C = = x_1\,\boldsymbol{c}_1 + x_2\,\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Gauss $\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = P_{C \leftarrow B}$$

Sök $P_{B \leftarrow C}$:

$$P_{B \leftarrow C} = P_{C \leftarrow B}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

4.7.13 Med $\mathbb{P}_2 = \{\text{polynom av grad} \leqslant 2\}$: tag 2 baser:

$$B = \{1 - 2t + t^2, \quad 3 - 5t + 4t^2, \quad 2t + 3t^2\}$$

$$C = \{1, t, t^2\}$$

Sök $P_{C \leftarrow B}$:

$$P_{C \leftarrow B} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Tag ett polynom:

$$[-1 + 2t]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sök $[-1 + 2t]_B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vilket ger $-1 + 2t = 5\,(1 - 2t + t^2) - 2\,(3 - 5t + 4t^2) + 1\,(2t + 3t^2)$.

Lay 2.5.1 Med

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & -7 \\ -3 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 4 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 0 & -19 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U)$$

Lay **2.5.13** Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1{:}+1 \rightarrow 2 \\ 1{:}-4 \rightarrow 3 \\ 1{:}+2 \rightarrow 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2{:}-5 \rightarrow 3 \\ 2{:}+1 \rightarrow 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ +4 & +5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lay 2.5.17 Ur $A = LU$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} L^{-1}$$

Gauss-Jordan. På L:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

På samma sätt med U:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Heath 2.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\det(A) = 1 - (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) = \varepsilon^2$

Vid LU-faktorisering:

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & 1-(1-\varepsilon^2) \end{pmatrix}$$

U är singulär om $\varepsilon \approx 10^{-8}$.

Vad kostar Gauss?

n obekanta: Gauss `x = A \ y` ger $\frac{n^3}{3}$ operationer.

A^{-1} kostar n^3.

LU-faktorisering kostar $\frac{n^3}{3}$.