Övning 2006–03–16

Fop: 7726700

4.3.1 Bildar dessa vektorer bas i $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vi ska ha tre element i basen.
2. Vi har tre stycken som är linjärt oberoende.

Ja, dessa är en bas i $\mathbb{R}^3$.

4.3.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är ingen bas, de är inte linjärt oberoende.

4.3.4

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Med elementära kolonnoperationer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -16 \\ -3 & 2 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

De var alltså linjärt oberoende. Kan därför bilda bas.

4.3.6

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

För få för att bilda bas i $\mathbb{R}^3$, men de är linjärt oberoende och kan därför bilda bas i ett underrum.

4.3.8

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De är för många. Men man kan ta ut tre av dem som bas (kolla).

4.3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nollrumet $\mathrm{Nul}(A)$ ur $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$: Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ur rad 3: $x_4=t$.

Ur rad 2: $x_3=s \Longrightarrow x_2=-4t+5s$

Ur rad 1: $x_1=-2s+3t$

Nollrummet:

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -2s+3t \\ -4t+5s \\ s \\ t \end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}\right\}$$

Eller

$$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$.

4.3.13 A är radekvivalent med B:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Nul}(A)=\mathrm{Nul}(B)$.

Ur B: $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$:

med $x_4=s$ och $x_3=t$ har vi $x_2=\frac{1}{2}(-5t-3s)$ och $x_1=-6t-5s$.

Söker $\mathrm{Col}(A)$

Ur B: $\mathrm{Col}(B)$: kolonn 1 och kolonn 2, linjärt oberoende.

Obs: elementära <u>rad</u>operationer påverkar **ej** kolonnernas linjära (o)beroende.

Även kolonn 1 och kolonn 2 i A är linjärt oberoende och kan bilda bas i $\mathrm{Col}(A)$.

4.3.26 Betrakta underrummet $\mathrm{Span}\{\sin t, \sin 2t, \sin t\cos t\}$ till de kontinuerliga funktioner. Sök en bas.

De tre är linjärt beroende. Men det finns två linjärt oberoende:

$\alpha\sin t+\beta\sin(2t)=$ konstant $0 \Longrightarrow \alpha=\beta=0$

Bas: $\{\sin t, \sin(2t)\}$.

4.4.1 I basen

$$B=\left\{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right\}$$

skrivs

$$[\boldsymbol{x}]_B=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

Hur skrivs $\boldsymbol{x}$ i standardbasen?

$$\boldsymbol{x}=5\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-12\\-25+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$$

4.4.7 Motsatt: Om vi har $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}8\\-9\\6\end{pmatrix}$ i standardbasen, hurs krivs då $\boldsymbol{x}$ i basen B:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\4\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$\boldsymbol{x}_B=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\4\\9\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-9\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2\\-1&4&-2\\3&9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-9\\6\end{pmatrix}$$

Gausselimination $\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}_B$$

4.4.9 $B\rightarrow e$ (vanliga basen). Vi har

$$B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{Svar: }\begin{pmatrix}2&1\\-9&8\end{pmatrix}\text{ ty:}$$

Matrinsen som skildrar basbyte P_B: $\boldsymbol{x}=P_B\boldsymbol{x}_B$.

$$\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix}=P_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}=P_B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Tillsammans:

$$\begin{pmatrix}2&1\\-9&8\end{pmatrix}=P_B\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

4.4.17 Med

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dessa spänner $\mathbb{R}^2$ men bildar inte bas: de är för många. Skriv $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ som 2 kombinationer i $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + x_3 \boldsymbol{v}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Med $x_3 = t \Longrightarrow x_2 = -(2+t)$ och $x_1 = (5+5t) \Longrightarrow \boldsymbol{x} = (5+5t)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) - (2+t)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -8 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.

4.4.21 Vi har två baser:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

och

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Hitta matrisen A som representerar "Coordinate mapping".

Kolla vad som händer med de element som bildar bas:

1.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Om vi vet vad som händer med baselement så vet vi vad som händer med alla element.

4.4.27 Betrakta $P_3 = \{\text{alla polynom med grad} \leqslant 3\}$. Är följande polynom linjärt oberoende?

$$p_1 = 1 + t^3$$

$$p_2 = 3 + t - 2t^2$$

$$p_3 = -3 + 3t^2 - t^3$$

Tag en bas i $P_3 = \{1, t, t^2, t^3\}$. I denna bas kan vi skriva:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim [\text{Gauss}] \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dessa var linjärt oberoende.