# Övning 2006–03–15

**4.1.1** Med

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geqslant 0, y \geqslant 0 \right\}$$

första kvadranten. Om

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in V \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in V$$

a) Gäller $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$? Ja, ty:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1, b_1 \geqslant 0 \Longrightarrow a_1 + b_1 \geqslant 0 \\ a_2, b_2 \geqslant 0 \Longrightarrow a_2 + b_2 \geqslant 0 \end{cases} \text{OK}$$

b) Med

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in V$$

tag till exempel $c = -1$:

$$\Longrightarrow c\,\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \notin V$$

**4.1.5** Med $P_n = \{\text{polynom av grad } \leqslant n\}$. Tag en delmängd $R = \{a\ t^2,\ a \in \mathbb{R}\}$. Är $R$ ett underrum? Tag $p_1(t) \in R: a\,t^2, p_2(t) \in R: b\,t^2 \Longrightarrow a\,t^2 + b\,t^2 = (a+b)t^2 \in R$. $R = \text{Span}\{t^2\}$.

**4.1.9** Vi är i $\mathbb{R}^3$; tag

$$\begin{pmatrix} s \\ 3s \\ 2s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

godtyckligt $s$. Underrum, ty $\mathbb{R}^3$ spännsa av 3 vektorer varav (1, 3, 2) kan vara en. Sats: sid 221 $\Longrightarrow$ "vår" vektor spänner ett *underrum*.

**4.1.15**

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 3a + b \\ 4 \\ a - 5b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detta är ej ett linjärt rum. Här finns inte något nollelement $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**4.1.27** Bevis att $0\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

1. $0\boldsymbol{u} = (0+0)\,\boldsymbol{u} \overset{(8)}{=\!=} 0\,\boldsymbol{u} + 0\,\boldsymbol{u}$.

2. $0\,\boldsymbol{u} - 0\,\boldsymbol{u} = (0\,\boldsymbol{u} + 0\,\boldsymbol{u}) - 0\,\boldsymbol{u}$.

$0\,\boldsymbol{u} - 0\,\boldsymbol{u} \overset{(3)}{=\!=} 0\,\boldsymbol{u} + (0\,\boldsymbol{u} - 0\,\boldsymbol{u})$.

3. Enl. (5): $\boldsymbol{0} = 0\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0}$

4. Enl. (4): $\boldsymbol{0} = 0\,\boldsymbol{u}$

**4.2.5** $A$: s nollrum $= \{\boldsymbol{x}: A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ur rad 3 $\Longrightarrow x_5 = 0$.

Ur rad 2 $\Longrightarrow x_4 = t$, en fri parameter. $x_3 = 9t$

Ur rad 1 $\Longrightarrow x_2 = s$, en fri parameter. $x_1 = 2s - 4t$. Således:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2s - 4t \\ s \\ 9t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi får nollrummet till $A$:

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**4.2.7** Mängden

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a + b + c = 2 \right\}$$

är inte ett underrum ty

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

**4.2.15** Betrakta

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2s + 3t \\ 4 + s - 2t \\ 4r + s \\ 3r - s - t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Hitta (något) $A$ så att $W = \mathrm{Col}(A)$.

$$W = \left\{ r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

T.ex. duger:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ANMÄRKNING: vi kan ha en annan ordning på kolonnerna i $A$ och fortfarande ha samma kolonnrum. Denna duger också:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**4.2.17**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

"Kolla" $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med $x_2 = t$ har vi $x_1 = 3t$.

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Nul}(A) \Longrightarrow \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Nul}(A)) = 1$$

och $\mathrm{Nul}(A)$ ligger i $\mathbb{R}^2$ (2 komponenter).

b) $\mathrm{Col}(A)$. $A$:s andra kolonn är $-3$ gånger den första kolonnen $\Longrightarrow$ t.ex. kolonn 1 spänner. $\mathrm{Col}(A)$ har dimensionen ett, men vi har fyra komponenter.

**4.2.27**

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

löser $A\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{Nul}(A)$ som är ett linjärt rum. $10\boldsymbol{x} \in$ rummet.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nul}(A)$$

och löser systemet.

**4.2.33** Vi har $T(A) = A + A^T$ ($A$ är en matris). Är $T$ linjär?

$$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T = (A + A^T) + (B + B^T) = T(A) + T(B)$$

Första kriteriet för linjära transformationer är uppfyllt. Ett villkor kvar:

$$T(c\,A) = c\,A + (c\,A^T) = c\,A + c\,A^T = c(A + A^T) = c\,T(A)$$

Därmed visat: $T$ är en linjär transformation.

b) Tag nu en symmetrisk matris $B\colon B = B^T$. Ge ett $A\colon T(A) = B$.

Variant: Om $B = B^T$, då är $2B = B + B^T \Longrightarrow B = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

Vi vill ha $T(A) \equiv A + A^T = \frac{1}{2}(B + B^T)$. $A = \frac{1}{2}B$ duger.

c) Sök $T$:s värdemängd:

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A$$

symmetri!

d) $T$:s "kärna", dvs nollrum $\{A\colon T(A) = 0\}$. I vårt fall $A + A^T = 0$.

$$A = -\,A^T$$

$A$: skevsymmetrisk.

**4.2.34** Med $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$, vi har $T(f) = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + K; F(0) = 0$.

Visa att $T$ är linjär.

1. $T(c\,f) = \int c\,f(t)\,\mathrm{d}t = c\int f(t)\,\mathrm{d}t = c\,T(f)$

2. $T(f+g) = \int\ (f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{d}t + \int g(t)\,\mathrm{d}t$.

$T$:s kärna $\{f\colon T(f) \equiv 0\}$.