2006–05–18

1. Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för trapestmetoden.

Lösning:

$$(T):\quad \begin{cases} y' = \lambda\, y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Trapets på T.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda\, y_{k+1})$$

$$y_{k+1}\left(1 - \frac{h\,\lambda}{2}\right) = y_k\left(1 + \frac{h\,\lambda}{2}\right)$$

$$y_{k+1} = \frac{1 + \frac{h\,\lambda}{2}}{1 - \frac{h\,\lambda}{2}}\, y_k$$

Tillväxtfaktor:

$$\frac{1 + \frac{h\,\lambda}{2}}{1 - \frac{h\,\lambda}{2}} = \left(1 + \frac{h\,\lambda}{2}\right)\left(1 + \frac{h\,\lambda}{2} + \frac{(h\,\lambda)^2}{4} + \frac{(h\,\lambda)^3}{8} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + h\,\lambda + \frac{(h\,\lambda)^2}{2} + \frac{(h\,\lambda)^3}{4} + \cdots$$

Jämför med analytiska lösningens tillväxtfaktor:

$$\mathrm{e}^{h\,\lambda} = 1 + h\,\lambda + \frac{(h\,\lambda)^2}{2} + \frac{(h\,\lambda)^3}{6} + \cdots$$

Stämmer med tre termer, lokala felet är av ordning $\mathcal{O}(h^3) \Rightarrow$ approximationsordningen är 2.

Stabilitet:

$$\left|\frac{1 + \frac{h\,\lambda}{2}}{1 - \frac{h\,\lambda}{2}}\right| \leqslant 1$$

Stabilitetsområde: $\left\{z \in \mathbb{C};\ \left|\frac{1 + \frac{h\,\lambda}{2}}{1 - \frac{h\,\lambda}{2}}\right| \leqslant 1\right\}$, dvs

$$\left|1 + \frac{z}{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z}{2}\right| \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) \leqslant 0$$

Geometriskt $\langle$fig28$\rangle$.

---

2. Visa att

$$\|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|_2$$

för vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Lösning:

$$\|A\|_2 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\,\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T\|_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \max_{\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{z}\|}{\|\boldsymbol{z}\|_2} =$$

Cauchy: $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ med likhet om de är linjärt beroende.

$$= \max_{\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{z}| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{z}\|_2} \leqslant \max_{\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{y}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{z}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{z}\|_2} = \|\boldsymbol{y}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2$$

Vi kan vå likhet eftersom vi har likhet i Cauchys olikhet om $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ är linjärt beroende. Välj $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$.

---

3. Visa att varje skalärprodukt $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{y}^T A\,\boldsymbol{x}$$

där A är symmetrisk positivt definit.

Lösning: Det finns en bas $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$.

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x_j\,\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n y_i\,\boldsymbol{e}_i$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j\,\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n y_i\,\boldsymbol{e}_i \right\rangle =$$

$$= [\text{skalärprodukten är linjär}] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j\,y_i \cdot \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle =$$

$$= [\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle \equiv a_{ij}] = \sum_i y_i \sum_j a_{ij}\,x_j = \boldsymbol{y}^T A\,\boldsymbol{x}$$

ty

$$\boldsymbol{y}^T A\,\boldsymbol{x} = \sum_i y_i(A\,x)_i = \sum_i y_i \cdot \sum_j a_{ij}\,x_j$$

A är symmetrisk, ty skalärprodukten är symmetrisk.

A är positivt definit ty skalärprodukt positiv, dvs $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} \geqslant 0$ med likhet om och endast om $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. A är positivt definit enligt definitionen.

---

4. Låt $P_1 = I - 2\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T$ och $P_2 = I - 2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T$ vara två $n \times n$-matriser med $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ ortonormala. Bestäm egenvärden och egenvektorer till produktmatrisen $P = P_1\,P_2$.

Lösning: Låt $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ vara en ON-bas.

$$P = (I - 2\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2^T)(I - 2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T) = I - 2\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T - 2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T + 4\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T =$$

$$= \left[\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_2 = 0\right] = I - 2\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T - 2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T$$

$$P\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 - 2\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1 - 2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{0} = -\,\boldsymbol{u}_1$$

Dvs $\boldsymbol{u}_1$ är en egenvektor med egenvärde $=-1$. På samma sätt $P\boldsymbol{u}_2 = \ldots = -\boldsymbol{u}_2$.

$\boldsymbol{u}_2$ är en egenvektor med egenvärde $=-1$.

Testa $\boldsymbol{u}_j$, $j = 3, \ldots, n$: $P\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j$.

dvs $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=3}^n$ är egenvektorer med egenvärde 1.

---

5. Låt $V = \mathrm{Span}\{x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ vara underrum i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ med de angivna elementen som standardbas. Visa att även $\{x, \sin^2 x, \cos 2x\}$ är bas i underrummet. Bestäm koordinaterna i denna bas för den vektor som i standardbasen har koordinaterna $(1, 2, 3)$.

Lösning:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Basbytesmatrisen:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(T) = 1$. T är reguljär $\Longrightarrow$ basen är OK.

Ekvationssystem för koordinaterna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $x + 2\sin^2 x + 3\cos^2 x = x + 5\sin^2 x + 3\cos 2x$.

---

6. Anta att du har en LU-faktorisering av två matriser: $B^{-1}A + I$ och B. Visa hur du kan använda dem för att lösa systemet $(A + B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Lösning: (med pivotering)

$$P_1(B^{-1}A + I) = L_1 U_1 \Longrightarrow B^{-1}A + I = P_1^T L_1 U_1$$

$$P_2 B = L_2 U_2 \quad \text{eller} \quad B = P_2^T L_2 U_2$$

$$A + B = B(B^{-1}A + I) = P_2^T L_2 U_2 P_1^T L_1 U_1$$

$$(A + B)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

löses med

$$P_2^T L_2 U_2 P_1^T L_1 U_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$L_2 U_2 P_1^T L_1 U_1 \boldsymbol{x} = P_2 \boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

1. Radbyte: $\tilde{\boldsymbol{b}} = P_2 \boldsymbol{b}$.

2. Triangulärt system: $L_2 \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ ger $\boldsymbol{y}$.

3. Triangulärt system: $U_2 \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ ger $\boldsymbol{z}$.

4. Radbyte: $\tilde{\boldsymbol{z}} = P_1\,\boldsymbol{z}$.

5. Triangulärt system: $L_1\,\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{z}}$.

6. Triangulärt system: $U_1\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ ger det sökta $\boldsymbol{x}$.

Allt kostar alltså $\mathcal{O}(h^2)$.

---

7. Visa att $\mathrm{Nul}(A^T) = V(A)^\perp$ utifrån SVD.

Bevis. $A = U\,\Sigma\,V^T =$

$$= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

U och V är ortogonala, Σ är "diagonal". (Låt $\mathbf{O}$ vara nollmatrisen.) Kompakt:

$$A = U_1\,\Sigma_r\,V_1^T$$

Σ_r är icke-singulär, V_1 har ortonormala kolonner. $\Longrightarrow V(A) = V(U_1)$. Om $A = B\,C$ och C är reguljär $\Rightarrow V(A) = V(B)$. $V(A) = \{A\,\boldsymbol{x}\} = \{B\,C\,\boldsymbol{x}\} = \{B\,\boldsymbol{y}\} = V(B)$.

$$A^T = V_1\,\Sigma_r^T\,U_1^T \Longrightarrow A^T U_2 = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^T U_2 = \mathbf{O} \quad \text{ty } U_1^T U_2 = \mathbf{O}$$

dvs $\mathrm{Nul}(A^T) = V(U_2)$. $U = (U_1 \quad U_2)$ är ortogonal: $V(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A^T)$ $\square$