2006–05–09

Splines, fortsättning

EXEMPEL. Bestäm den linjära spline som interpolerar $y(t)=t^2$ i $0, \frac{1}{2}, 1$. ⟨figa⟩.

Lösning med basfunktioner ⟨figb⟩.

Splinen: $s(t)=y(0)\,B_0(t)+y\left(\frac{1}{2}\right)B_1(t)+y(1)\,B_2(t)$.

$$s(t)=0\cdot B_0(t)+\frac{1}{4}B_1(t)+1\cdot B_2(t)$$

$$B_1(t)=\begin{cases} 2t & \text{om}\, t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 2-25 & \text{om}\, t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

$$B_2(t)=-1+2t,\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

Vi får:

$$s(t)=\begin{cases} \frac{1}{4}\cdot 2t & =\frac{1}{2}t & \text{då } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(2-2t)+1(-1+2t) & =-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t & \text{då } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

TENTAUPPGIFT Bestäm en kvadratisk spline s som interpolerar $f(x)=x^3$ i 0, $\frac{1}{2}$ och 1, och som uppfyller $s'(0)=0$.

Ledning: Ansätt på listigt sätt. Jämför Newtons form vid interpolation.

Lösning: ⟨figc⟩ Gå genom $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$, $(1,1)$. Ansätt $s_1=a+b\,x+c\,x^2$, $s_1'=b+2\,c\,x$.

Villkor $s_1(0)=0\Longrightarrow a=0$, $s_1'(0)=0\Longrightarrow b=0$, $s_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\Longrightarrow c=\frac{1}{2}$.

$$\boxed{s_1(x)=\frac{1}{2}x^2}$$

Ansätt s_2 listigt:

$$s_2=\frac{1}{8}+d\left(x-\frac{1}{2}\right)+e\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

Nu blir $s_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ direkt. Vi har förbrukatt *ett* villkor i ansatsen.

$$s_2'=d+2\,e\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Villkor $s_2'\left(\frac{1}{2}\right)=s_1'\left(\frac{1}{2}\right)\Longrightarrow d=\frac{1}{2}$.

Villkor $s_2(1)=1$:

$$s_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+e\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\Longrightarrow e=\frac{5}{2}$$

$$\boxed{s_2(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Numerisk beräkning av integraler, Heath 8.3

Allmänt:

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Höger ledet kallas en kvadraturformel.

Varför numeriska metoder?

- $f(x)$ har ingen känd primitiv funktion:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

- $f(x)$ är ej explicit matematiskt given, men kan beräknas för varje x genom t.ex. ett datorprogram.

- f bara given som en tabell, $[x_i, \quad f(x_i)]$

- den analytiska metoden ger numeriska svårigheter:

  EXEMPEL.

$$I=\int_{999}^{1000} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan(1000)-\arctan(999)$$

  ger kancellation.

Grundidé för kvadraturformler:

Approximera f med en enklare funktion $\hat{f}$ (enklare att integrera), exempelvis polynom, splines, exponentialfunktioner, trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner. Integrera $\hat{f}$ i stället för f. Vi kommer endast att behandla polynom och splines.

EXEMPEL. ⟨fig$d$⟩ Linjär interpolation ger trapetsregeln.

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)(f(a)-f(b))$$

Med styckvis linjär interpolation får vi ⟨fig$e$⟩

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f_1+f_2)+\frac{h}{2}(f_2+f_3)+\cdots+\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)=$$

$$=h\left[\frac{1}{2}f_1+f_2+f_3+\cdots+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right].$$

Kallas trapetsformeln.

EXEMPEL.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2\approx 0.693147$$

Trapets med $h=\frac{1}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{1.25}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.75}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\approx 0.697$$

Man kan visa att trapetsformeln uppfyller ($p_1(x)$ styckvis linjär):

$$\int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in [x_1, x_n]$$

Högre ordnings kvadraturformler fås genom högre ordnings interpolation.

Exempel. Kvadratisk interpolation ger Simpsons formel.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_2(x)\,\mathrm{d}x = [\text{visa som övning}] =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Ledning: använd intervallet $[0, 1]$.

Felet: $\frac{b-a}{180} h^4 f^{\mathrm{IV}}(\eta)$.

Adaptiva metoder, ex `quadl`.

Gauss kvadratur: bestäm punkter x_i och vikter w_i så att den blir exakt för så högt gradtal som möjligt för polynom.

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Svar: gradtal $2n-1$ är möjligt.

Optimering Heath kapitel 6

Vi studerar matematiskt formulerade optimeringsproblem

$$\min f(\boldsymbol{x}): \quad \begin{array}{c} f\text{: objektfunktion} \\ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}$$

då

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}: \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{g}\text{: likhetsbivillkor} \\ \boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{array}$$

och

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{0}: \quad \begin{array}{c} \boldsymbol{h}\text{: olikhetsbivillkor} \\ \boldsymbol{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \end{array}$$

För optimering utan bivillkor gäller om f är tillräckligt reguljär:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

optimering $\Longleftrightarrow$ ekvationslösning.

Sökmetoder Newtons metod för optimering = Newtons metod för $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

Andra ordningens villkor behövs för att avgöra typen av extrempunkt.

Exempel. Om $H(\boldsymbol{x})$ är positivt definit (Hessianen) och $\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ så är $\hat{\boldsymbol{x}}$ minimum.

För problem med bivillkor kan vi införa en ny objektfunktion som inkluderar bivillkoren.

Exempel. Lagranges metod:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$$

om vi antar endast likhetsbivillkor. Sök extrempunkt till $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, dvs lös ekvationssystemet $\nabla L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g(x_i) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Detta ekvationssystem kan lösas t.ex. med Newtons metod.