2006–05–05

ODE Heath kapitel 9

Begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Testproblemet:

$$(T) \quad \begin{cases} y' = \lambda\, y \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \text{har exakt lösning } y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda t}$$

1. Euler framåt: $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$
2. Euler bakåt: $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1})$
3. Mittpunktsmetoden: $y_{k+1} = y_{k-1} + 2\, h\, f(t_k, y_k)$
4. Trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$

1 och 3 är explicita, 2 och 4 är implicita.

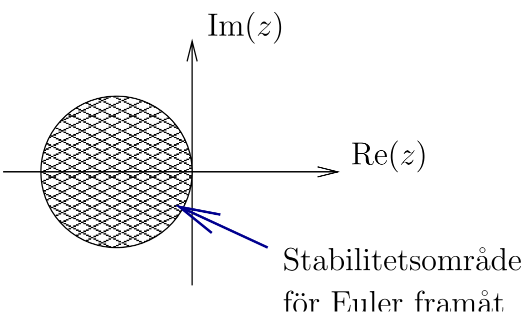
1, 2 och 4 är **enstegsmetoder**, 3 är en **tvåstegsmetod**.

Stabilitet Testa på (T). Om $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ så är (T) stabilt. Lösningskurvorna dras samman med tiden. En metod med samma stabilitetsegenskap som (T) kallas A-stabil. En metod är stabil för en steglängd h om den ger begränsade approximationer för testproblemet med $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.

Exempel. Euler framåt på (T).

$$y_{k+1} = y_k + h\, \lambda\, y_k = (1 + h\, \lambda)\, y_k = (1 + h\lambda)^{k+1}\, y_0$$

Stabilitetsvillkor $|1 + h\ \lambda| \leqslant 1$ för att $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ ska vara en begränsad talföljd, dvs metoden är stabil om för $z = h\lambda$ det gäller att z ligger i cirkeln $\{z \in \mathbb{C}, |1 + z| \leqslant 1\}$.



Figur 1.

Euler bakåt på (T).

$$y_{k+1} = h\, \lambda\, y_{k+1}, \text{ dvs } y_{k+1} = \frac{1}{1 - h\, \lambda} y_k$$

Begränsade lösningar om

$$\left| \frac{1}{1 - h\, \lambda} \right| \leqslant 1$$

Stabilitetsvillkor $|1-h\,\lambda|\geqslant 1$. Utanför en cirkel, stabilitetsområdet $\{z\in\mathbb{C};|z-1|\geqslant 1\}$.

Euler bakåt är stabil för $\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 0$, alltså A-stabil (samma egenskap som (T)).

Övning: Visa att trapetsmetoden har stabilitetsområde $\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 0$, dvs A-stabil, och har approximationsordning 2.

Lösning: Heath.

Ett system

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}'=A\,\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}$$

kallas linjärt. Det är stabilt om alla egenvärden till A har negativ realdel. Vid ett system $\boldsymbol{y}'=A\,\boldsymbol{y}$ måste $h\,\lambda_j\in S$ (stabilitetsområde för metoden) för alla λ_j-egenvärden.

Enstegsmetoder, Runge-Kutta metoder

Allmän form:

$$y_{k+1}=y_k+h\sum_{i=1}^{s}b_ik_i$$

där

$$k_i=f\left(t_k+c_i\,h,\quad y_k+h\sum_{j=1}^{s}a_{i,j}\,k_j\right)$$

Euler framåt: $s=1, c_1=0, a_{1,1}=0, b_1=1$

$$y_{k+1}=y_k+h\,f(t_k,y_k)$$

Heuns metod: $s=2, A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(k_1+k_2)$$

$$k_1=f(t_k,y_k)$$

$$k_2=f(t_k+h,y_k+h\,k_1)$$

Butcherfält:

$$\begin{array}{c|cc}0&0&0\\1&1&0\\\hline &\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}$$

B-fältet:

$$\begin{array}{c|cccc}0&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&1&0\\\hline &\frac{1}{6}&\frac{2}{6}&\frac{2}{6}&\frac{1}{6}\end{array}$$

RK av ordning 4.

MATLABs `ode45` är 4:e ordningens R-K med 5:e ordnings R-K för att uppskatta felet. Fehlberg.

Tentatal Approximationsordning för Heuns metod:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + h\, f(t_k, y_k))]$$

$$(T) \quad f(t, y) = \lambda y$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda\, y_k + \lambda(y_k + h\,\lambda\, y_k)] =$$

$$= y_k + h\,\lambda\, y_k + \frac{h^2\,\lambda^2}{2}\, y_k = y_k\left(1 + h\,\lambda + \frac{(h\,\lambda)^2}{2}\right)$$

Tillväxtfaktor $1 + h\,\lambda + \frac{1}{2}(h\,\lambda)^2$. Jämför med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda}$.

$$e^{h\lambda} = 1 + h\,\lambda + \frac{(h\,\lambda)^2}{2} + \frac{(h\,\lambda)^3}{6} + \cdots$$

Stämmer med tre termer, felet är $\mathcal{O}(h^3)$: då är approximationsordningen 2.

Mer om implicita metoder

EXEMPEL. Trapetsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$$

Om f är icke-linjär så har vi här en icke-linjär ekvation att lösa. Om systemform så icke-linjärt ekvationssystem att lösa. Det är upplagt för fixpunktsiteration, dvs

$$y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1}^{(l)}\right)\right)$$

l är iterationsindex vid fixpunktsiteration. Startapproximationen $y_{k+1}^{(0)}$ kan vi ta från en enklare, explicit metod, exempelvis Euler framåt. Vi har ett så kallat prediktor-korrektor-par av metoder. Här är Euler-framåt prediktorn och trapetsmetoden korrektorn.

EXEMPEL:

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1$$

Bestäm $y(0.1)$ approximativt. Prediktor: Euler framåt, $h = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + h\,(-y_0)^2 = 1 + 0.1(-1^2) = 0.9$$

Korrektor: Trapetsmetoden, $h = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(-y_0^2 - y_1^2)$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}(-1^2 - y_1^2)$$

(Kan naturligtvis lösas som kvadratisk ekvation.) Fixpunktsiteration med $y_1^{(0)} = 0.9$ från prediktorn:

$$y_1^{(0)} = 0.9$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0.1}{2}\left(-1 - 0.9^2\right) = 0.9095$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0.1}{2}\left(-1 - 0.9095^2\right) = 0.9086$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \frac{0.1}{2}\left(-1 - 0.9086^2\right) = 0.9087$$

Obs: detta är **ett** tidssteg med metoden, om vi vill längre får vi upprepa alltihop.

Konvergens hos vår fixpunktsiteration?

$$y_{k+1} = g(y_{k+1})$$

$$g(y) = c + \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y)$$

Villkor $\|G(y)\| \leqslant \mu < 1$. G är jakobianen till g. $\|\frac{h}{2} f_y\| \leqslant \mu < 1$ där f_y är Jakobianen av f med avseende på y.

Exempel:

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, y \text{ växande}, y \geqslant 0$$

$h = 0.1$:

$$\left|\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 0.05\,\mathrm{e}^{-y} \leqslant 0.024$$

I allmänhet om $\|f_y\|$ är stor så måste h väljas litet.

Alternativ till fixpunktsiteration: Newtons metod på icke linjära ekvationen

$$y_{k+1} - \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y_{k+1}) - c = 0$$

Exempel (fortsättning)

$$y_1 - 1 - \frac{0.1}{2}\left(-1 - y_1^2\right) = 0$$

$$y_1^{(0)} = 0.9$$

$$y_1^{(1)} = 0.9 - \frac{0.9 - 1 - \frac{0.1}{2}\left(-1 - 0.9^2\right)}{1 - \frac{0.1}{2}(-2 \cdot 0.9)} = 0.9087$$