2006–05–04

Numerisk approximation av derivator, Heath 8.6

Framåtdifferens:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Bakåtdifferens:

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Central differens:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Exempel. Framåtdifferensen:

$$R_T = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots - f(x)\right] - f'(x) =$$

$$= \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}\,f'''(x) + \cdots$$

dvs $R_T = \mathcal{O}(h), h \to 0$.

$$R_T = a_1\,h + a_2\,h^2 + a_3\,h^3 + \cdots$$

För centraldifferensen kan man visa att $R_T = \mathcal{O}(h^2), h \to 0$.

$$R_T = b_1\,h^2 + b_2\,h^4 + b_3\,h^6 + \cdots$$

Andraderivatan kan approximeras med centraldifferensen:

$$f''(x) \approx [\text{framåt}] \approx \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \approx [\text{bakåt}] \approx \frac{1}{h^2}[f(x+h)-f(x)-(f(x)-f(x-h))] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\,[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]$$

$$R_T = \mathcal{O}(h^2), h \to 0$$

$$R_T = c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + c_3\,h^6 + \cdots$$

Funktionsfelet.

Centraldifferens:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Osäkerhet i f: $|\delta f| \leqslant \varepsilon$. Felet R_f som beror på denna osäkerhet kan då uppskattas:

$$|R_f| \leqslant \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h} = \mathcal{O}(h^{-1}), h \to 0$$

Medan $R_T = \mathcal{O}(h^2), h \to 0$. Här är det konflikt mellan feltermerna. Det finns ett bästa h.

Man kan undvika små h med en teknik kallad Richardson-extrapolation, Heath 8.7. Förutsättning: man har en utveckling av trunkeringsfelet i h-potenser.

För central differenskvot har vi

$$F(h) \equiv \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

med $F(h) \to f'(x)$ då $h \to 0$, $R_T = b_1 h^2 + b_2 h^4 + \cdots$

$$F(h) = f'(x) + b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$F(2h) = f'(x) + 4 b_1 h^2 \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Longrightarrow \text{Bättre formel:} \quad \frac{F(2h) - F(h)}{3} = \frac{3 b_1 h^2}{3} + \mathcal{O}(h^4) = b_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

dvs $F(h) = f'(x) + \frac{F(2h) - F(h)}{3} + \mathcal{O}(h^4)$.

dvs $F_2(h) \equiv F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{3} = f'(x) + \mathcal{O}(h^4)$. $F_2(h)$ är en bättre formel med fel $\mathcal{O}(h^4)$. Vi kan upprepa och eliminera h^4-termer och få en formel med fel $\mathcal{O}(h^6)$.

$$F_3(h) \equiv F_2(h) + \frac{F_2(h) - F_2(2h)}{15}$$

Differentialekvation, Heath 9

(ODE)

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y}(t)$ är sökta funktioner, $\boldsymbol{f}$ är kända. Begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

Exempel

$$\begin{cases} y' = -y + \sin(t) + \cos(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Exempel. Ekosystem, kaniner och rävar.

$$\begin{cases} k' = k - 0.5\, k\, r, & k(0) = 1 \\ r' = -0.7 r + 0.1\, k\, r, & r(0) = 2 \end{cases}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 30$$

||.

Högre ordningens ODE kan skrivas om som första ordningens system (lab 4).

EXEMPEL. Mekanik: rörelse hos ett sammansatt fjädersystem. ⟨fig: i taket sitter en fjäder med fjäderkonstant k_1, på den m_1, på m_1 fjädern k_2, på k_2 massan m_2, elongationer y_1 resp y_2⟩

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = -k_1\, y_1 - k_2\,(y_1 - y_2) \\ m_2\, y_2'' = k_2\,(y_1 - y_2) \\ y_1(0) = c_1 \\ y_1'(0) = c_2 \\ y_2(0) = c_3 \\ y_2'(0) = c_4 \end{cases}$$

Teknik: sätt $y_1' = y_3$ och $y_2' = y_4$. Ger utökat system av första ordningen:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = \frac{1}{m_1}\{\ldots\} \\ y_4' = \frac{1}{m_2}\{\ldots\} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = c_1 \\ y_2(0) = c_3 \\ y_3(0) = c_2 \\ y_4(0) = c_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Numeriska metoder, differensmetoder. Tekniker för att *ta fram* metoder.

1. y' approximeras med differenskvot.

Framåtdifferens ger Eulers framåtmetod.

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

ger $y(t+h) = y(t) + h\,y'(t)$ och med beteckningarna $y_k = y(t)$ och $y_{k+1} = y(t+h)$ får vi formeln

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$$

Detta är Eulers framåt. På samma sätt ger bakåtdifferensen

$$y'(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$$

... Eulers bakåtmetod:

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Centraldifferensen:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}$$

ger mittpunktsmetoden:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\,h\, f(t_k, y_k)$$

2. Integrering. $y' = f(t, y)$ integreras över intervallet (t_k, t_{k+1}):

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y' = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y)$$

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

Exempel. Trapetsregeln ger trapetsmetoden.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

Vi får trapetsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

Euler framåt är *explicit*, givet y_k kan man direkt räkna fram y_{k+1}. Euler bakåt och trapetsmetoden är *implicita*, eftersom y_{k+1} finns även i högerledet av formeln, dvs en icke linjär ekvation (eller ekvationssystem) måste lösas i varje tidssteg.

Några viktiga begrepp

Lokalt fel, $L_k = y_k - u_{k-1}(t_k)$ där u_{k-1} är **lokal lösning** till det **lokala problemet**:

$$\begin{cases} u'_{k-1} = f(t, u_{k-1}) \\ u_{k-1}(t_{k-1}) = y_{k-1} \end{cases}$$

⟨fig18⟩

Globalt fel, $G_k = y_k - y(t_k)$

En metod är **konvergent** om det gobala felet går mot noll då $h \to 0$.

Om lokala felet är av ordning h^{p+1} så har metoden metoden approximationsordning p.

Lokala felet bestäms genom att tillämpa metoden på testproblemet

$$(T) \quad \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = c \end{cases}$$

med analytisk lösning $y(t) = c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Man kontrollerar till vilken ordning i h som den numeriska metoden approximerar den exakta lösningen.

Exempel: Euler framåt på (T).

$$y_{k+1} = y_k + h\,\lambda\,y_k = (1 + h\lambda)y_k$$

Här är $1 + h\lambda$ en tillväxtfaktor. Tillväxtfaktorn jämförs med analytiska lösningens tillväxtfaktor. Taylorutveckling: $\mathrm{e}^{h\lambda} = 1 + h\,\lambda + \frac{1}{2!}\,(h\lambda)^2 + \frac{1}{3!}(h\lambda)^3 + \cdots$. Stämmer med två termer och felet $\mathcal{O}(h^2)$. Eulers framåtmetod har det lokala felet $\mathcal{O}(h^2)$ och approximationsordning 1.