2006–04–24

Numerisk Analys Introduktion Brygga mellan naturvetenskap/teknik och matematik. Verklighetens problem är ofta för komplicerade för att kunna hanteras analytiskt.

Computational Science $\longleftrightarrow$ Scientific Computing

1. Matematisk modell av fysikaliskt fenomen.
2. Algoritm för numerisk approximation
3. Implementering, programvara
4. Numerisk simulering
5. Representation av resultat, grafik
6. Utvärdering, tolkning

2–4 är väsentligen "Scientific Computing".

Varför behövs numerisk analys?

Matematisk analys versus numerisk analys.

EXEMPEL:

ODE:

$$y'(t) = 1 - 2\,a\,t\,y(t), \quad t > 0, \quad a\,\text{konstant}, \quad y(0) = 0$$

Mycket eneklt problem, vi kan sätta upp en matematisk lösning.

$$y(t) = \mathrm{e}^{-at^2} \int_0^t \mathrm{e}^{a u^2}\, \mathrm{d}u$$

Om vi söker t.ex. $y(1)$ är vi inte klokare av det här. Vi måste ta en numerisk metod för att lösa integralen. Vi kan inte hitta någon primitiv funktion.

Numerisk metod direkt på (ODE).

Euler framåt ⟨fig13⟩

Algoritm:

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + h\,y'(t_0) = y_0 + h\,f(t_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\,y'(t_1)$$

$$\vdots$$

För problemet

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - 2\,a\,t\,(y(t))^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Vi kan inte hitta någon analytisk lösning $y(t) = ??$ ges, men den numeriska metoden är lika enkel att använda.

OBS: "Analysera" inte för långt utan ta den numeriska metoden direkt på ursprungsproblemet.

Varför behövs numerisk analys: matematisk analys versus numerisk analys.

EXEMPEL. Matematisk pendel: massa m, vinkel θ mot vertikalen, längd L. Newtons andra lag ger en rörelseekvation:

$$\text{RE:} \qquad \theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

För små vinklar: $\sin\theta \approx \theta$.

$$\text{RE}': \qquad \theta'' = -\frac{g}{L}\theta$$

med analytisk lösning:

$$\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right)$$

Där A och φ kan bestämmas från begynnelsevärden. Hur bra är approximationen?

Med en numerisk metod, exempelvis `ode45` i MATLAB, är det lika lätt att lösa (RE) som (RE$'$). Men den analytiska lösningen kan behövas ibland för analys av hur lösningen beror på parametrarna (startvärdena) genom A och φ.

OBS: Om man endast är intresserad av lösningskurvan eller lösningen i vissa punkter så lös rätt problem (RE) från början med numerik.

Några grundläggande begrepp

1. Matematiskt problem,

   numeriskt problem,

   algoritm

   EXEMPEL

   matematiskt problem:

   $$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

   numeriskt problem, linjär approximation av f ⟨fig14⟩:

   $$I \approx \tilde{I} = \int_a^b p_1(x)\,\mathrm{d}x$$

   algoritm:

   $$\tilde{I} = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

2. Stabilitet ("det här är klurigt!")

   Ett problem är *stabilt* om små förändringar i indatan ger små förändringar i utdata.

   En algoritm är *stabil* om den ger en approximativ lösning som motsvarar exakt lösning till ett problem med lite förändrade indata.

EXEMPEL: $y = P(x)$, vi räknar ut det och får $\hat{y} = \hat{P}(x)$. Stabilt problem och stabil algoritm. ⟨fig15⟩. $\hat{x} = P^{-1}(\hat{y}) = P^{-1}(\hat{P}(x))$. $\hat{x}$ är nära x ty algoritmen är stabil. P stabilt $\Longrightarrow \hat{y}$ är nära y.

Instabilt problem, stabil algoritm. ⟨fig16⟩. $\hat{x}$ är nära x ty algoritmen är stabil, men $\hat{y}$ är långt från y, ty problemet är instabilt.

EXEMPEL. Gungfly:

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001 \\ 2001 \end{pmatrix}, \text{lösning: } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gausselimination med 3 siffror.

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 & 2001 \\ 0 & 1001 - \frac{1000}{1001} \cdot 1000 & 2001 - \frac{1000}{1001} \cdot 2001 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1000}{1001} = 0.999 \quad 0.999 \cdot 1000 = 999, \quad 999 \cdot 2001 = 2000$$

Lösning

$$x_2 = \frac{1}{2} = 0.500$$

$$x_1 = \ldots = 1.50$$

Långt ifrån rätt lösning, men Gauss-eliminationen är stabil. Problemet är instabilt. Ekvationssystemet $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med matris $A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}$ är illa konditionerat. Konditionstalet $\kappa(A)$ är ungefär 2001, talar om hur instablt problemet är.

Den erhållna approximativa lösningen är exakt lösning till problemet

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001.5 \\ 2000.5 \end{pmatrix}$$