2006–04–07

Kontinuerliga dynamiska system

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

EXEMPEL.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 1+2\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Lösningsformel:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Detta är ett godtagbart svar (många gånger) men man kan få bättre uppfattning av lösningen genom Eulers formel: $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^t(\cos 2\,t + \mathrm{i}\sin 2\,t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^t\,(\cos(-2\,t) + \mathrm{i}\sin(-2\,t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^t \left[(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} \cos(2\,t) \\ -\sin(2\,t) \end{pmatrix} + (c_1 - c_2)\,\mathrm{i} \begin{pmatrix} \sin(2\,t) \\ \cos(2\,t) \end{pmatrix} \right] = \mathrm{e}^t \left[z_1 \begin{pmatrix} \cos(2\,t) \\ -\sin(2\,t) \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} \sin(2\,t) \\ \cos(2\,t) \end{pmatrix} \right]$$

z_1 och z_2 bestäms från begynnelsevärden.

Potensmetoden för dominerande egenpar $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$ till A.

$$\boldsymbol{x}_0 = \text{start}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = A\,\boldsymbol{x}_k$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{y}_{k+1}}{\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|}$$

Konververar mot $\boldsymbol{u}_1$ som är $\boldsymbol{v}_1$ normerad.

Deflation Anta att $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ är en ON-bas av egenvektorer och $(\lambda_1, \boldsymbol{u}_1)$ är beräknat med t.ex. potensmetoden. Då ger potensmetoden på

$$A_2 = A - \lambda_1\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T$$

"Jag vill att ni visar det: det är en eller två rader." Konvergens mot $(\lambda_2, \boldsymbol{u}_2)$ om $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geqslant \cdots$. Ledning: Visa att A_2 har egenvärdena $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och egenvektorerna är inte ändrade alls.

Anmärkning: Man behöver inte bilda matrisen A_2 eftersom vi bara behöver kunna räkna ut A_2 gånger en vektor $\boldsymbol{v}$: $A_2\,\boldsymbol{v} = A\,\boldsymbol{v} - \lambda_1\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T\,\boldsymbol{v}$. Notera skalärprodukten $\boldsymbol{u}_1^T\,\boldsymbol{v}$: vi slipper räkna ut en ny matris. $A\,\boldsymbol{v}$ har vi redan (som avbildning betraktat: det är inte säkert att vi behöver ta fram A).

$$A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\,\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

Inversiteration För (beloppsmässigt) minsta egenvärde av A använder vi potensmetoden på A^{-1} eftersom A^{-1} har egenvärdena $\{\lambda_i^{-1}\}_{i=1}^{n}$, fungerar om det minsta egenvärdet är strikt mindre än de övriga.

Potensmetoden på A^{-1}:

$$\boldsymbol{x}_0 = \text{start}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = A^{-1}\,\boldsymbol{x}_k$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{y}_{k+1}}{\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|}$$

Men i andra steget gör vi inte så i praktiken. Vi löser istället $A\,\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k$ för $k = 0, 1, \ldots$ Obs: $L\,U$-faktorisering *en* gång , sedan lösning av triangulära system i varje iteration

$A - \sigma\,I$. A har egenvärden λ_i. $A\,\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$:

$$A\,\boldsymbol{x} - \sigma\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} - \sigma\,\boldsymbol{x}$$

$$(A - \sigma\,I)\,\boldsymbol{x} = (\lambda - \sigma)\,\boldsymbol{x}$$

$A - \sigma\,I$ har egenvärden $\lambda_i - \sigma$. $(A - \sigma\,I)^{-1}$ har egenvärden $(\lambda_i - \sigma)^{-1}$. För att få det egenvärde till A som ligger närmast σ tar vi potensmetoden på matrisen $(A - \sigma I)^{-1}$.

Algoritmen blir:

$$\sigma\ \text{givet}, \boldsymbol{x}_0\ \text{start}$$

$$(A - \sigma\,I) = L\,U$$

$$L\,\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_k$$

$$U\,\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{z}_k$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{y}_{k+1}}{\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|}$$

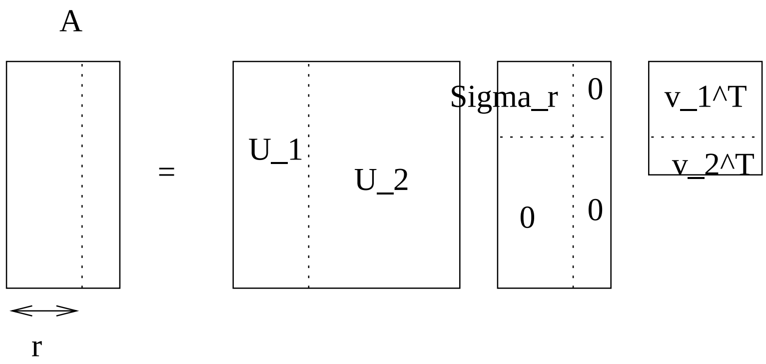
Detta kallas invers iteration med skift.

$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{u}_i$, den egenvektor till λ_i närmast σ. $\lambda_i = \boldsymbol{u}_i^T\,A\,\boldsymbol{u}_i$.

σ kan uppdateras under iterationerna eftersom $\boldsymbol{x}_k^T\,A\,\boldsymbol{x}_k \to \lambda_i$, nytt $\sigma = \boldsymbol{x}_k^T\,A\,\boldsymbol{x}_k$ efter några iterationer k. Bonusuppgift 7 är en utveckling av dessa idéer.

SVD

$$A = U\,\Sigma\,V^T$$



Figur 1.

$$A = U_1\,\Sigma_r\,V_1^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i\,\boldsymbol{u}_i\,\boldsymbol{v}_i^T$$

Överbestämt system $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, minsta kvadrat $\min_{\boldsymbol{x}} \|A\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$.

$$\hat{\boldsymbol{x}} = V_1\,\Sigma^{-1}\,U_1^T\boldsymbol{b} = A^+\,\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-1}\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{b}$$

är *en* lösning. $r = \operatorname{rang}(A)$.

Anmärkning: Denna lösning är den lösning som har minsta norm $\|\cdot\|_2$. En allmän lösning är $\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}$ där $\boldsymbol{h} \in \operatorname{Nul}(A)$, dvs $\boldsymbol{h} = V_2\,\boldsymbol{y}_2$ för något $\boldsymbol{y}_2$ (ty $\operatorname{Nul}(A) = \operatorname{Col}(V_2)$) och

$$\hat{\boldsymbol{x}} = V_1\,\Sigma_r^{-1}\,U_1^T\boldsymbol{b} = V_1\,\boldsymbol{y}_1$$

Vi har alltså

$$\|\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}\| = \|V_1\,\boldsymbol{y}_1 + V_2\,\boldsymbol{y}_2\|^2 = \|V\boldsymbol{y}\|^2 \quad \text{där } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= [V \text{ ortogonal}] = \|\boldsymbol{y}\|^2 = ||\boldsymbol{y}_1||^2 + ||\boldsymbol{y}_2||^2$$

som är minst om $y_2 = \boldsymbol{0} \Longrightarrow h = 0$. Alltså är lösningen $\hat{\boldsymbol{x}}$ den med minst norm.

Trunkerad SVD ger bästa approximation av en matris. Vi har

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i\,\boldsymbol{u}_i\,\boldsymbol{v}_i^T$$

Om vi trunkerar efter k termer får vi

$$A \approx A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\boldsymbol{u}_i\,\boldsymbol{v}_i^T$$

Man kan visa att A_k är bästa approximation med k termer av rang-1 matriser. Felet

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

och

$$\kappa(A_k) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}, \quad \kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

Man kan alltså få ett mindre konditionstal genom en sådan approximation.

Tillämpningar

Bildkomprimering, skilja bruset från signaler, modellreduktion, komprimering av information.

Linjära rummet $\mathcal{C}^0[0,1]$, skalärprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Vad händer med vinkeln mellan $f(t) = t^n$ och $g(t) = t^{n+1}$ i $\mathcal{C}^0[0,1]$ då $n \to \infty$?

Lösning:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^{2n+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\,n+2}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 t^{2n}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\,n+1}$$

$$\|g\|^2 = \int_0^1 t^{2n+2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2n+1}\,\sqrt{2n+3}}{2\,n+2} \longrightarrow 1, n \to \infty$$

Vinkeln går mot noll: de blir nästan linjärt beroende. Slutsats: $\{t^j\}_{j=0}^{n+1}$ är ingen bra bas för $\mathbb{P}_{n+1}$. Men det finns polynom som är ortogonala, ger ON-bas i $\mathbb{P}_{n+1}$.

Spektralsatsen A symmetrisk $\Rightarrow \lambda$ reella. Visa att egenvektorerna kan väljas reella.

Lösning: $A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{y}: \quad A(\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{y})$$

$$A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \quad \text{(realdel)}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$A\,\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{y} \quad \text{(imaginärdel)}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

Jag kan ta $\boldsymbol{x}$ eller $\boldsymbol{y}$, båda kan inte vara $\mathbf{0}$.