2006–04–04

Kontinuerliga dynamiska system

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{sökes}$$

$$A \quad \text{är en given matris}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{är ett givet startvärde}$$

Tillämpning: Laboration 4, löses med numeriska metoder.

En **analytisk metod** som fungerar om A är diagonaliserbar: $P^{-1}\,A\,P = D$, där P är egenvektorer, och D är egenvärden:

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Lösningsformel:

$$\boldsymbol{x} = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\boldsymbol{v}_n$$

Konstanterna $c_1, ..., c_n$ kan bestämmas från $\boldsymbol{x}_0$.

Exempel:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 4\,x_3(t), & x_1(0) = 4 \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) - x_3(t), & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = 2\,x_1(t) + x_2(t) - x_3(t), & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer.

Egenvärden:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

enligt lösningsformeln får vi

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

c_1, c_2, c_3 bestäms från begynnelsevärdena, genom ett ekvationssystem som löses.

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\2 & 1 & 4\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Svar:

$$\boldsymbol{x}(t) = 2\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

Lay 7 Symmetriska matriser.

DEFINITION: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$

|||.

SATS: (1): A symmetrisk $\Rightarrow$ egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala.

Bevis.

$$\begin{array}{l} A\,\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\,\boldsymbol{v}_1\\ A\,\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\,\boldsymbol{v}_2\end{array}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = [\text{egenvärde}] = A\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1\cdot A^T\boldsymbol{v}_2 =$$

$$[A\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = (A\,\boldsymbol{v}_1)^T\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^T A^T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1\cdot A^T\boldsymbol{v}_2]$$

$$= [\text{symmetri}] = \boldsymbol{v}_1\cdot A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1\cdot\lambda_2\,\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$$

$$\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0$$

□

Diagonalisering $A = P\,D\,P^{-1}$ är OK om P är inverterbar. Speciellt om P är ortogonal: $A = P\,D\,P^T$, dvs A ortogonalt diagonaliserbar.

SATS: (2): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: A är ortogonalt diangonaliserbar $\Longleftrightarrow$ A är symmetrisk.

Bevis ingår inte i kursen.

EXEMPEL: Diagonalisera A:

$$A = \begin{pmatrix}\boxed{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Egenvärden: 2 till [2]; 2, 2, 0 till $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Egenvektorer:

$$\lambda_1 = 2 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

Välj

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_2 \quad \text{och} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observera att dessa vektorer är ortonormala.

$$\lambda_4 = 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \text{normerad} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi får, normerade, egenvektorer:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

SATS: (**Spektralsatsen**) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisk. Då gäller:

1. A har n reella egenvärden.
2. Dimensionen för egenrum till λ är lika med multipliciteten hos λ.
3. Egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala.
4. A är ortogonalt diagonaliserbar.

Bevis. (Av 1.)

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$$

Multiplicera med $\bar{\boldsymbol{x}}^T$ från vänster:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T A \boldsymbol{x} = \lambda \bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} \tag{1}$$

Talet $\bar{\boldsymbol{x}}^T A\,\boldsymbol{x} = \left(\bar{\boldsymbol{x}}^T A\,\boldsymbol{x}\right)^T = \boldsymbol{x}^T A^T \bar{\boldsymbol{x}} = [A \text{ reell, symmetrisk}] = \boldsymbol{x}^T \bar{A}\,\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\bar{\boldsymbol{x}}}^T \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \overline{\bar{\boldsymbol{x}}^T A\,\boldsymbol{x}}$, talet är sitt konjungat, talet är reellt.

Vidare är $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ i (1). □

Övning: Visa att även egenvektorerna är reella.

Lay 7.2 Kvadratiska former

En kvadratisk form Q är en funktion $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ på formen $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x}$ där A är en symmetrisk matris.

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = x_1^2 + 4x_1\,x_2 + 4x_2^2 + 6x_1\,x_3 + 10x_2x_3 + 6\,x_3^2$$

Exempel: Skriv den kvadratiska formen

$$4\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + 10\,x_3^2 + 4\,x_1\,x_2 + 8\,x_1\,x_3 + 8\,x_2\,x_3$$

på matrisform.

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} \quad \text{med} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Variabeltransformation i kvadratisk form.

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = P^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

Då:

$$\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^T A\,(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T (P^T A\,P)\,\boldsymbol{y}$$

Om $P^T A\,P = D$, diagonal, så har vi diagonaliserat den kvadratiska formen. Eftersom A är symmetrisk så går detta enligt spektralsatsen, med

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Exempel. Diagonalisera den kvadratiska formen

$$Q(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 + 4\,x_2^2 + 4\,x_1\,x_2$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenvärden

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = P^{-1}\,\boldsymbol{x} = [\text{ortogonal}] = P^T\boldsymbol{x}$. Ger $Q(P\boldsymbol{y}) = 3y_1^2 + 8\,y_2^2$.

SATS: (4): A symmetrisk: Då kan den kvadratiska formen $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\,A\,\boldsymbol{x}$ diagonaliseras till $Q(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T D\,\boldsymbol{y}$ genom transformationen $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$.

Klassificering av kvadratisk form

A eller $Q(\boldsymbol{x})$ är positivt definit om $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} > 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

A eller $Q(\boldsymbol{x})$ är negativt definit om $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} < 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Indefinit: olika tecken för olika $\boldsymbol{x}$.

Semidefinit: om olikheterna ovan inte gäller strängt.

SATS: (5): A (symmetrisk) är positivt definit $\Longleftrightarrow$ alla egenvärden är positiva.

A är negativt definit $\Longleftrightarrow$ alla egenvärden är negativa.

A är indefinit $\Longleftrightarrow$ det finns egenvärden med olika tecken.

EXEMPEL: Klassificera $Q(\boldsymbol{x}) = 8\,x_1^2 + 6\,x_1\,x_2 = \boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärden

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Formen är indefinint ty egenvärden har olika tecken. Diagonaliseringen med $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ ger

$$Q(P\boldsymbol{y}) = 9\,y_1^2 - y_2^2$$

Spektral uppdelning A är ortogonalt diagonaliserbar:

$$A = P\,D\,P^T$$

D är egenvärden, P är ortogonala egenvektorer.

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{u}_n^T & - \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1\,\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \lambda_n\,\boldsymbol{u}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{u}_n^T & - \end{pmatrix} = \lambda_1\,\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\,\boldsymbol{u}_n\,\boldsymbol{u}_n^T$$

Alltså en summa av matriser av rang 1 given av egenvektorer och egenvärden. Detta kallas för en *spektral uppdelning* av matrisen A.