2006–03–30

Idag var jag inte med, tack till Mattias Eriksson för dessa anteckningar.

Egenvärden/-vektorer

$A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$

Karakteristiska ekvationen: $\det(A - \lambda\,I) = 0$, en n:te-gradare.

Egenrummet till λ = nollrummet till $A - \lambda\,I$.

SATS: (1): Om A är triangulär så är egenvärdena diagonalelementen.

Bevis.

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & * & * & \cdots \\ & a_{22} - \lambda & * & \cdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & & a_{n\,n} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{n\,n} - \lambda) \qquad \square$$

SATS: (2): Om $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ är olika egenvärden och $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ är motsvarande egenvektorer är dessa linjärt oberoende.

Bevis. Antag att de är linjärt beroende. Låt p vara lägsta index så att nästa vektor

$$\boldsymbol{v}_{p+1} = c_1\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\,\boldsymbol{v}_p \tag{1}$$

($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ är linjärt oberoende).

Multiplicera (1) med A:

$$\lambda_{p+1}\,\boldsymbol{v}_{p+1} = c_1\,\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\,\lambda_p\,\boldsymbol{v}_p$$

Multiplicera (1) med λ_{p+1}:

$$\lambda_{p+1}\,\boldsymbol{v}_{p+1} = \lambda_{p+1}\,c_1\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_{p+1}\,c_p\,\boldsymbol{v}_p$$

Subtrahera ledvis:

$$\boldsymbol{0} = c_1\,(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\,(\lambda_p - \lambda_{p+1})\,\boldsymbol{v}_p$$

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ är linjärt oberoende $\Longrightarrow$ alla koefficienter $= 0$. Egenvärdena olika ger $c_1 = \cdots = c_p = 0$, dvs $\boldsymbol{v}_{p+1} = \boldsymbol{0}$ och $c_1\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\,\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$.

Motsägelse, alltså är de linjärt oberoende. $\square$

DEFINITION: Två matriser A och B kallas **similära** om $A = P\;B\;P^{-1}$ för någon inverterbar matris P.

DEFINITION: En matris A är **diagonaliserbar** om A är similär med en diagonalmatris.

SATS: (4): Två similära matriser har samma egenvärden, till och med samma karakteristiska ekvation.

$$A - \lambda\,I = P\,B\,P^{-1} - \lambda\,P\,P^{-1} = P\,(B - \lambda\,I)\,P^{-1}$$

$$\det(A - \lambda\,I) = \det(P) \cdot \det(B - \lambda\,I) \cdot \det(P^{-1})$$

SATS: (5): HUVUDSATSEN, A är $n \times n$.

$$A \text{ diagonaliserbar} \Longleftrightarrow A \text{ har } n \text{ linjärt oberoende egenvektorer}$$

Då är $A=PDP^{-1}$ där kolonnerna i P utgörs av egenvektorerna och

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Bevis. "$\Longleftarrow$": Med P,D som ovan:

$$PD=\begin{pmatrix}| & & |\\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\\ | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}| & & |\\ A\boldsymbol{v}_1 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n\\ | & & |\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}| & & |\\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\\ | & & |\end{pmatrix}=AP$$

$$AP=PD\Longleftrightarrow A=PDP^{-1}$$

P är inverterbar, ty $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_n$ är linjärt oberoende.

"$\Longrightarrow$": $A=PDP^{-1}\Longleftrightarrow AP=PD$.

$$\mathrm{VL}=\begin{pmatrix}| & & |\\ A\boldsymbol{v}_1 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n\\ | & & |\end{pmatrix}\quad \text{för en uppsättning } \boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_n$$

$$\mathrm{HL}=\begin{pmatrix}| & & |\\ \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n\\ | & & |\end{pmatrix}\quad \text{för några } \lambda_1,...,\lambda_n$$

Då är $A\,\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i\,\forall i$, dvs $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ är egenvektorer, och de är linjärt oberoende, ty P är inverterbar. □

EXEMPEL: Diagonalisera

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)\Longrightarrow\lambda\in\{-1;4\}$$

$\lambda_1=-1$ ger:

$$\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=4$ ger:

$$\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -3 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}$$

Kontroll: $AP = PD$:

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$$

De var lika, alltså har vi räknat rätt.

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

(Anmärkning: I de kopierade anteckningarna jag fick står det $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, men det kan väl inte gärna stämma?)

$\lambda_3 = 0$:

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Longrightarrow \lambda = 1 \text{ är en dubbelrot}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet spänns av $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ej diagonaliserbar!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Karakteristisk ekvation:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Ekvationen har inga rella rötter: det finns inga reella egenvärden.

SATS: (MULTIPLA EGENVÄRDEN) Utan bevis. A är en $n \times n$-matris.

a) Dimensionen hos egenrummet till $\lambda \leqslant$ multipliciteten hos λ.

b) Summan av egenrummens dimmensioner $= n \Longleftrightarrow A$ är diagonaliserbar.

c) Om B_k är en bas för egenrummet till λ_k så gäller:

$$A \text{ diagonaliserbar} \Longrightarrow B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_r \quad \text{är en bas för } \mathbb{R}^n$$

($r =$ antalet olika λ).

Tillämpning på diskreta dynamiska system

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x}_{k+1} = A\,\boldsymbol{x}_k \end{cases} \quad \text{(Linjärt dynamiskt system)}$$

Exempelvis migrationsexemplet (befolkning i storstad).

s_k, f_k är centrumboende respektive förortsboedne.

$$\begin{cases} s_{k+1} = a_{11}\,s_k + a_{12}\,f_k \\ f_{k+1} = a_{21}\,s_k + a_{22}\,f_k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} s \\ f \end{pmatrix}_{k+1} = A \begin{pmatrix} s \\ f \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = A\,\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_2 = A^2\,\boldsymbol{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x}_k = A^k\,\boldsymbol{x}_0$$

Diagonalisera (om möjligt):

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^2 = \left(P D P^{-1}\right)^2 = P D P^{-1} P D P^{-1} = P D I D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}_k = P D^k P^{-1} \boldsymbol{x}_0 = [\text{i 2 dimensioner}] =$$

$$= \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda_1^k \boldsymbol{v}_1 & \lambda_2^k \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^k \boldsymbol{v}_1 + c_2\,\lambda_2^k\,\boldsymbol{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \boldsymbol{x}_0, \quad \text{Lös systemet } P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_0.$$

Motsvarande för högre dimensioner.

$$T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T \text{ linjär avbildning}$$

Mål: hitta en annan bas i $\mathbb{R}^n$ så att matrisen för T blir diagonal. Om man väljer en bas bestående av egenvektorer till matrisen för T i standardbasen (om möjligt) ges T av

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$