2006–03–28

QR-faktorisering $m \times n$-matris:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Vi vill multiplicera A med ortogonala matriser. Householdertfansformationer: $H = I - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T$, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.

H är symmetrisk: $H^T = I^T - 2\left(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T\right)^T = I - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T \Longrightarrow H$ är symmetrisk.

H är ortogonal: $H^{-1} = H^T = H$.

$H^2 = I$?

$$(I - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T)(I - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T) = I^2 - 2\,I\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T I + 4\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T =$$

$$= [\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = 1] = I - 4\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T + 4\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T = I$$

Vad gör en Houeholdertransformation med en vektor $\boldsymbol{y}$?

$$H\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - 2\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y} \text{ är en skalär}] = \boldsymbol{y} - 2\big(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y}\big)\,\boldsymbol{v}$$

$(\boldsymbol{v}^T\ \boldsymbol{y})\ \boldsymbol{v}$ är projektionen av $\boldsymbol{y}$ på $\boldsymbol{v}$. Således åstadkommer en Householdertransformation spegling i ett plan vinkelrätt mot $\boldsymbol{v}$.

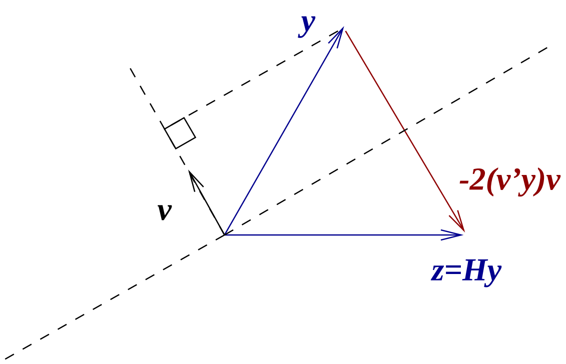

Figure 1. En Householdertransformation speglar $\boldsymbol{y}$ i ett plan $\perp \boldsymbol{v}$

Givet $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ med $\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{z}\|$, hur väljer vi $\boldsymbol{v}$ så att $H\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$? Välj

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|}$$

Tillbaka till A:

1. Spegla $\boldsymbol{a}_1$ på

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |r_{11}| = \|\boldsymbol{a}_1\|$$

dvs

$$\boldsymbol{v}_1 = \beta \left(\boldsymbol{a}_1 - \begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Sätt

$$H_1 = I - 2\, \boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_1^T$$

Då blir

$$H_1\, A = \left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & | & & | \\ \vdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n \\ 0 & | & & | \end{array} \right)$$

2.

$$\text{Spegla} \begin{pmatrix} 0 \\ \hline | \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ | \end{pmatrix} \text{ på } \begin{pmatrix} 0 \\ \hline r_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ med hjälp av } H_2.$$

$$H_2\, H_1\, A = \left(\begin{array}{cc|ccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \hline 0 & 0 & | & & | \\ \vdots & \vdots & \tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}}_3 & \cdots & \tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}}_n \\ 0 & 0 & | & & | \end{array} \right)$$

Efter n steg:

$$H_n\, H_{n-1} \cdots H_1\, A = \left(\begin{array}{ccc} r_{11} & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ \mathbf{0} & & r_{nn} \\ \hline & \mathbf{0} & \end{array} \right)$$

$$Q^T A = \left(\frac{R}{\mathbf{0}} \right) \Longrightarrow A = Q \left(\frac{R}{\mathbf{0}} \right)$$

Observera att kolonnerna i A ska vara oberoende.

Q är $m \times m$, $\left(\frac{R}{\mathbf{0}} \right)$ är $m \times n$. Låt Q' vara $m \times n$ och bestå av de n första kolonnerna i Q. Vi har:

$$A = Q'\, R$$

EXEMPEL:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = 3$$

$$\boldsymbol{a}_1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I - 2\,\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_1^T = I - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = I - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1\,A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spegla } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ på } \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = I - 2\,\boldsymbol{v}_2\,\boldsymbol{v}_2^T = I - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H_2\,H_1\,A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 0 & 25 & 9 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = R$$

$$Q = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Lay kapitel 5 Egenvärden

EXEMPEL:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Specialfall:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ är *egenvektorer* till A. -1 och 4 är motsvarande *egenvärden*.

DEFINITION: En **egenvektor** till en kvadratisk matris A är en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$ för något tal λ. λ kallas då **egenvärde**.

OBSERVATION: Om $\boldsymbol{x}$ är egenvektor med egenvärde λ så är $t\,\boldsymbol{x}$ också det för alla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ty

$$A\,(t\,\boldsymbol{x}) = t\,A\,\boldsymbol{x} = t\,\lambda\,\boldsymbol{x} = \lambda\,(t\,\boldsymbol{x})$$

Till ett egenvärde hör därmed ett **egenrum**.

|||.

Hur hittar man egenvärde och egenvektor?

$$A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow (A - \lambda\,I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

1. Hitta λ så att $A - \lambda\,\boldsymbol{x}$ blir singulär.
2. Bestäm, för sådant λ, $\mathrm{Nul}(A - \lambda\,I)$.

EXEMPEL

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Påstående: $\lambda = 2$ är egenvärde, ty

$$A - 2\,I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Singulär matris. Nollrummet:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenrummet (= mängden av alla egenvektorer) är

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

||.

OBSERVERA: $A-\lambda I$ är singulär $\iff \det(A-\lambda I)=0$. Detta kallas **den karakteristiska ekvationen**. Nä är $\det(A-\lambda I)$ ett n:tegradspolynom (ses genom utveckling längs en rad).

Tillbaka till exemplet.

Karakteristiska ekvationen:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 2-\lambda\\ 2 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -3 & -1-\lambda & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)=(2-\lambda)^2\lambda=0$$

$$\lambda\in\{2,0\}$$

Vad blir egenvektorn till $\lambda=0$?

Lös $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_3=2t\\ x_2=-t\\ x_1=t\end{cases}\Longrightarrow \boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$