2006–03–27

Vikarie Sven Järner ⟨`jarner@chalmers.se`⟩.

Mer om skalärproduktrum.

EXEMPEL

1. Vanlig skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$.

2. Viktad skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$.

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \omega_1^2\, u_1\, v_1 + \omega_2^2\, u_2\, v_2 + \cdots + \omega_n^2\, u_n\, v_n$$

"Där blåste *den* bort" — papper försvinner i GD.

3. Polynomrum, $\mathbb{P}_n$. $t_0, t_1, ..., t_n$ är olika punkter, fixerade.

$$\langle p, q \rangle = p(t_0)\, q(t_0) + p(t_1)\, q(t_1) + \cdots + p(t_n)\, q(t_n)$$

4. $\mathcal{C}^0[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Två olikheter:

1) Cauchy-Schwarz

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$$

Bevis. Låt $\boldsymbol{v_u}$ vara $\boldsymbol{v}$:s projektion på $\boldsymbol{u}$.

$$\|\boldsymbol{v_u}\| \leqslant \|\boldsymbol{v}\|$$

Obs: Om $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longrightarrow \|\boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$.

$$\|\boldsymbol{v_u}\| = \left\| \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\, \boldsymbol{u} \right\| = \frac{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle|}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\, \|\boldsymbol{u}\|$$

dvs

$$\frac{|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|}{\|\boldsymbol{u}\|} \leqslant \|\boldsymbol{v}\| \quad \text{och} \quad |\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \qquad \square$$

2) Triangelolikheten

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

$$\mathrm{VL}^2 = \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\, \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2 = \mathrm{HL}^2$$

Tillämpning på exempel 2:

Viktad minsta-kvadrat Låt $\hat{\boldsymbol{x}}$ vara minsta-kvadrat-lösning till $A\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dvs $\hat{\boldsymbol{x}}$ är lösning till $A\, \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}$ där $\hat{\boldsymbol{y}}$ är $\boldsymbol{y}$:s projektion på $\mathrm{Col}(A)$. Felvektorns norm $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\|$ blir minimerad.

Felvektor med vikter:

$$\begin{pmatrix} \omega_1\,(y_1-\hat{y}_1) \\ \omega_2\,(y_2-\hat{y}_2) \\ \vdots \\ \omega_n\,(y_n-\hat{y}_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{normen}^2 = \omega_1^2(y_1-\hat{y}_1)^2 + \cdots + \omega_n^2\,(y_n-\hat{y}_n)^2$$

dvs normen i exempel 2. Hur minimeras den viktade normen?

Inför matrisen

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \mathbf{0} \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \omega_n \end{pmatrix}$$

Felvektorn blir $W(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) = W\,\boldsymbol{y} - W\,\hat{\boldsymbol{y}} = W\,\boldsymbol{y} - W\,A\,\hat{\boldsymbol{x}}$. Minimeras i norm om $\hat{\boldsymbol{x}}$ är "vanlig" minsta-kvadrat-lösning till $W A\,\boldsymbol{x} = W\boldsymbol{y}$.

Tillämpning på exempel 3:

Trendanalys Vi har mätdata $y_0, \ldots, y_n$ tagna i några olika punkter $t_0, \ldots, t_n$.

Anpassning:

- Linjär: $a_0 + a_1 t$
- Kvadratisk: $b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2$.
- Kubisk: $c_0 + c_1\,t + c_2\,t^2 + c_3\,t^3$.

Naturliga basen $1, t, t^2, t^3 \ldots$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & t & t^2 & t^3 & \cdots \\ \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_0 \\ | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_1 \\ | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_2 \\ | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_3 \\ | \end{pmatrix} & \cdots \end{array}$$

I det här sammanhanget har vi $\boldsymbol{a}_0 = [1\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots\ \ 1]^T$. $A = [\boldsymbol{a}_0\ \ \boldsymbol{a}_1\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{a}_p]$.

Välj $p_0, p_1, \ldots, p_n$ som polynom av grad $0, 1, 2, \ldots$ så att de är ortogoonala med avseende på skalärprodukten i exempel 3. En kurvanpassning: $d_0\,p_0(t) + d_2\,p_1(t) + d_2\,p_2(t)$. Trendfunktionen.

Tillämpning på exempel 4:

Fourierserier Intervall $[0, 2\pi]$. Funktionerna

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos(n\,t), \sin(n\,t)\} \in \mathcal{C}^0[0, 2\pi]$$

Dessa utgör en ortogonal mängd med avseende på skalärprodukten

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,t)\cos(m\,t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ för } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\,t)\sin(m\,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Fourieranalys går ut på (bland annat) projicera funktioner på sådana underrum. En bästa linjärkombination:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2\,t) + b_2 \sin(2\,t) + \cdots + a_n \cos(n\,t) + b_n \sin(n\,t)$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(k\,t)\rangle}{\langle \cos(k\,t), \cos(k\,t)\rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\,t)\, \mathrm{d}t$$

Ortogonala avbildningar i $\mathbb{R}^2$: Bevarar längder och ortogonalitet.

$$\boldsymbol{y} = A\,\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{pmatrix} A\,\boldsymbol{e}_1 & A\,\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

A är en ortogonalmatris. Två fall ⟨fig11⟩:

1: Vridning vinkeln θ

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2: Spegling i linje genom origo.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

I $\mathbb{R}^3$: rotationer och speglingar.

$$A = Q\,R$$

$$Q = H_n\,H_{n-1} \cdots H_1 \quad \text{En produkt av en massa speglingar.}$$