2006–03–21

Vektornormer:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Matrisnormer:

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \tag{1}$$

Definitionen (1) av matrisnorm ger

$$\|A\,\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\|\,\|\boldsymbol{x}\|, \forall \boldsymbol{x} \tag{2}$$

Lösningsnoggrannhet På grund av fel i data och/eller avrundningsfel vid beräkningarna, löser vi vid beräkning ett system $\hat{A}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{b}}$ i stället för $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$ är ett "stört högerled", och $\hat{A} = A + E$ är en störd matris.

Om vi antar endast fel i högerled, dvs matrisen är exakt, $E = 0$, så får vi: Vi låter $\Delta\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b} \end{cases}$$

Subtrahera den första från den andra:

$$A\,\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \Delta\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\Delta\boldsymbol{b}$$

dvs, när vi nyttjar (2):

$$\|\Delta\boldsymbol{x}\| = \|A^{-1}\,\Delta\boldsymbol{b}\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|\Delta\boldsymbol{b}\| \tag{3}$$

Vi vill helst ha en uppskattning av relativa felet. Med (2):

$$\|\boldsymbol{b}\| = \|A\,\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\|\,\|\boldsymbol{x}\|$$

eller

$$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|A\|}$$

Detta ger tillsammans med (3):

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|\,/\,\|A\|} = \|A^{-1}\|\,\|A\|\,\frac{\|\Delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Vänster led är relativt fel i lösningen, höger led är en konstant gånger relativt fel i högerled. $\|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ kallas **konditionstalet**.

Konditionstalet betecknas $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$. Det är bra med ett litet konditionstal. Formeln säger att om $\kappa(A)$ är stort förstärks indatafel kraftigt till ett utdatafel.

Ett system $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med stort $\kappa(A)$ kallas **illa konditionerat** eller **instabilt**.

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, klart.
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$.

Ortogonalt komplement: $x \in W^\perp \Longleftrightarrow x \cdot w = 0 \forall w \in W$. $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul}(A)$.

“Jag har aldrig varit med om en sådan fläkt i någon föreläsningssal. Häftigt!” OH-bladen stannar inte på projektorerna.

$$\text{proj}_W(\boldsymbol{y}) = UU^T\boldsymbol{y}$$

där U har ortonormala kolonner $U^TU = I$ (men $UU^T \neq I$).

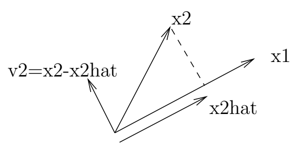
Lay 6.4 Gramm-Schmidt

Ortogonalisering

SATS: (11): Givet en bas $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^p$ i W som är ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Gör en ortogonalbas så här:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1$$



Figur 1.

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \hat{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2$$

(kolla! $\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$)

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{x}_p - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{\boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}}{\boldsymbol{v}_{p-1} \cdot \boldsymbol{v}_{p-1}}\boldsymbol{v}_{p-1}$$

Det gäller att $\text{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \text{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ för $k = 1 \ldots p$.

ANMÄRKNING: Gram-Schmidt ger oss en ortogonalbas $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^p$. Vi får en ON-bas genom art normera $\boldsymbol{v}$-vektorerna.

EXEMPEL PÅ GRAM-SCHMIDT

Bestäm en ON-bas för $\text{Col}(A)$ då

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt: (sats 11):

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{-36}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{30}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är ON-bas för $\mathrm{Col}(A)$.

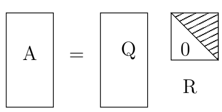
Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ och man i MATLAB skriver `x = A \ b` görs

1. om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Gauss-elimination.

2. om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: QR-faktorisering.

SATS: (12): QR-faktorisering.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ med linjärt oberoende kolonner, kan faktoriseras: $A = Q\,R$ där Q är $m \times n$ med ortonormala kolonner och R är $n \times n$ uppåt triangulär med positiv diagonal.



Figur 2.

Bevis. Gram-Schmidt:

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{G-S}} Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

med $x_k \in \operatorname{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$: $\boldsymbol{x}_k = r_{1,k}\boldsymbol{u}_1 + r_{2,k}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + r_{k,k}\boldsymbol{u}_k$ eller

$$\boldsymbol{x}_k = Q \begin{pmatrix} r_{1,k} \\ r_{2,k} \\ \vdots \\ r_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = Q \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix} = Q\,R \qquad \square$$

Exempel (fortsättning): QR-faktorisera

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt enligt ovan:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q\,R = A \Longrightarrow Q^T Q\,R = Q^T A \Longrightarrow R = Q^T A$$

Basbyte mellan ON-baser:

allmänt: $[x]_C = P_{C \leftarrow B}\,[x]_B$.

och $[x]_B = P_{C \leftarrow B}^{-1}[x]_C$.

Om både B och C är ON-baser så blir $P_{C \leftarrow B}$ en ortogonal matris. Då blir basbytesformeln lite enklare: $[x]_B = P_{C \leftarrow B}^T\,[x]_C$.

Definition: Om $A^T A = I$ kallas A en **ortogonal matris**.

Exempel: i $\mathbb{R}^2$ är standardbasen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortogonal.

Låt

$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Också ON.

a) bestäm koordinaterna för $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ i basen C.

b) vilket element har koordinaterna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen C.

Lösning a:

$$P_{B \leftarrow C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{x}]_C = P_{C \leftarrow B} \, [\boldsymbol{x}]_B = P_{B \leftarrow C}^{-1} \, [\boldsymbol{x}]_B$$

$$[\boldsymbol{x}]_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösning b:

$$[\boldsymbol{x}]_B = P_{B \leftarrow C} \, [\boldsymbol{x}]_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: Symmetrisk matris: $A = A^T$. Positivt definit: $\boldsymbol{x}^T A \, \boldsymbol{x} \geqslant 0 \forall \boldsymbol{x}$, lika med endast om $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.