2006–03–17

⟨fig5⟩ V = mängden av styckvis konstanta funktioner på en fix indelning av ett intervall.

Lay 4.5 Dimension (fortsättning)

SATS: (11): H underrum till V, V är ett linjärt rum $\Longrightarrow \dim(H) \leqslant \dim(V)$. Om $\dim(H) = \dim(V)$ så är $H = V$.

SATS: (12): $\dim(V) = p, p \geqslant 1$. Varje uppsättning av p linjärt oberoende element är en bas. Varje uppsättning av p element som spänner rummet är en bas.

Dimensionen hos $\mathrm{Nul}(A)$ och $\mathrm{Col}(A)$.

$\dim(\mathrm{Col}(A))$ = mängden pivot-kolonner.

$\dim(\mathrm{Nul}(A))$ = mängden fria variabler i $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

EXEMPEL 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -7 & -6 \\ -3 & 6 & 4 & 7 & 11 \\ 2 & -4 & 1 & -12 & -11 \end{pmatrix}$$

Radreduktion:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Två pivotkolonner $\Longrightarrow \dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$. Tre fria variabler: x_2, x_4 och x_5. $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 3$.

FRÅGA:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

där Δ är Laplace-operatorn. $V = \{u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); u \in \mathcal{C}^2(\Omega), u = 0 \text{ på } \partial\Omega\}$ där $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Visa att V är ett underrum till $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Hur blir det med:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = g & \text{på randen} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} f \text{ given} \\ g \text{ given} \\ u \text{ sökt} \end{pmatrix}$$

Vad blir det för lösningsmängd?

Lay 4.6 Rang.

DEFINITION: $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A))$. |||.

$\mathrm{Row}(A)$, radrummet till A, är det rum som spänns av raderna till A. $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$.

Vi har tidigare konstaterat att de elementära radoperationerna bevarar radrummet, dvs radekvivalenta matriser har samma radrum.

EXEMPEL 1: Bestäm $\mathrm{Row}(A), \mathrm{Col}(A), \mathrm{Nul}(A)$ och $\mathrm{rang}(A)$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Gör radreduktion:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Vi ser att

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\}$$

Pivotkolonnerna, nr 1 och 2:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$$

För $\mathrm{Nul}(A)$ lös $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Enligt definitionen är $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$.

SATS: (14): (viktig) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. $\dim(\mathrm{Row}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rang}(A) =$ antal pivotelement.
2. $\dim(\mathrm{Nul}(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A)) = n$

Del ett brukar kallas **rangsatsen.** Del två brukar kallas **dimensionssatsen**.

Bevis.

1:

$$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \text{antal pivotkolonner i } A = \text{antal pivotkolonner i radreducerad } B$$

B har en icke-nollrad för varje pivotelement och dessa rader är linjärt oberoende eftersom en rad inte kan skrivas som linjärkombination av senare rader. $\Longrightarrow$

$$\dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rang}(A) = \text{antal pivotelement}$$

2:

$$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = (\text{antal fria variabler i } A\boldsymbol{x} = 0) = \text{antal icke-pivotkolonner}$$

och antal pivot + antal icke-pivot = antal kolonner = n, dvs $\dim(\mathrm{Nul}(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A)) = n$. □

Anmärkning: Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och $\operatorname{rang}(A) = n$ så kallar Ivar det för "full rang". Då är A inverterbar. A kallas då också *reguljär* eller *icke-singulär*.

Lay 4.7 Basbyte (klurigt)

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^n$ vara bas i det linjära rummet V (som alltså har dimension n). Då kan $\boldsymbol{x} \in V$ entydigt skrivas

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{b}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Det finns en entydig motsvarighet: $\boldsymbol{x} \in V \longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Operationerna har denna motsvarighet:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \in V \longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$$

$$s \odot \boldsymbol{x} \in V \longleftrightarrow s \cdot \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n \quad s \in \mathbb{R}$$

Exempel 1. Låt $V = \operatorname{Span}\{\sin(t), \cos(t)\}$. Tag $\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t\}$.

$$\boldsymbol{x} = \sin t - \cos t \longleftrightarrow [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = 2\sin t + 3\cos t \longleftrightarrow [\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = 3\sin t + 2\cos t \longleftrightarrow [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} + [\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \odot \boldsymbol{x} = 2\sin t - 2\cos t \longleftrightarrow 2[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En annan bas ger en annan koordinatvektor.

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_i\}_{i=1}^n \quad \text{ger} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n$$

Hur förhåller sig koordinatvektorerna till varandra?

Baselementen $\boldsymbol{b}_j$ kan uttryckas i basen $\mathcal{C}$:

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{ji} \boldsymbol{c}_i$$

dvs

$$[\boldsymbol{b}_j]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_{j1} \\ \gamma_{j2} \\ \vdots \\ \gamma_{jn} \end{pmatrix}$$

Låt

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{b}_j$$

dvs

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Då är

$$[x]_C = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [\boldsymbol{b}_j]_C = A\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

där A är matrisen med kolonner $[\boldsymbol{b}_j]_C$, dvs:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\boldsymbol{b}_1]_C & [\boldsymbol{b}_2]_C & \cdots & [\boldsymbol{b}_n]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Beteckna matrisen A enligt Lay: $P_{C\leftarrow\mathcal{B}}$ (transformationsmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen C). Då gäller *basbytesformeln*:

$$[\boldsymbol{x}]_C = P_{C\leftarrow\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Exempel 2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är basen } C \text{ i } \mathbb{R}^2$$

Standardbas $\mathcal{B}$ är $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ och $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Låt

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Då har vi $[\boldsymbol{x}]_C$:

$$[\boldsymbol{x}]_C = P_{C\leftarrow\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

med

$$P_{C\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Detta ger då

$$[\boldsymbol{x}]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$