2006–03–16

Lay 4.3 (fortsättning) Linjärt beroende, bas.

SATS: (4): $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$, $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ är linjärt beroende $\iff$ någon $\boldsymbol{v}_j$, $j > 1$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}$.

ÖVNING: (Tentauppgift) Låt $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^m$ vara linjärt oberoende i V. Anta att $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^m$. Visa att då är $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{u}\}$: bevis som övning — från definitionen.

FRÅGA: Betrakta mängden av styckvis konstanta funktioner på en fix indelning av ett intervall. ⟨fig5⟩. Är den mängden ett linjärt rum? Vad kan man ta för bas i detta rum?

Lay 4.4 Koordinatsystem

SATS: (7): Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ vara en bas för ett linjärt rum V. Då gäller (observera entydigheten):

$$\forall x \in V \quad \exists! c_1 \ldots c_n \in \mathbb{R}: \quad \boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + c_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{b}_n$$

Bevis. $\mathcal{B}$ är en bas $\Rightarrow c_1, \ldots, c_n$ existerar, ty basen spänner rummet. För entydigheten antar vi

$$\boldsymbol{x} = d_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + d_n \boldsymbol{b}_n$$

och visar $d_1 = c_1, \ldots, d_n = c_n$. Vi har

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = (c_1 - d_1) \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n) \boldsymbol{b}_n$$

$\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^n$ är linjärt oberoende $\Longrightarrow c_j = d_j$ för alla j. □

DEFINITION: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kallas *koordinaterna* för $\boldsymbol{x}$ i basen $\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^n$. Koordinatvektorn:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

beteckning: $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$.

Avbildningen $\boldsymbol{x} \in V \mapsto [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ kallas *koordinatavbildningen* relativt basen $\mathcal{B}$.

|||.

EXEMPEL 1: Låt $P_1[0, 1]$ vara mängden funktioner på $[0, 1]$. Standardbas: $\mathcal{B}_1 = \{1, t\}$. Vi kan även ta $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + t\}$ som bas i $P_1[0, 1]$ ty

1. $\mathcal{B}_2$ spänner: $u = a\,t + c$ godtyckligt kan skrivas

$$u = a(1 + t) + (c - a)1$$

2. $\mathcal{B}_2$ är linjärt oberoende, ty $1 + t$ kan inte skrivas som linjärkombination av 1.

Betrakta $u = 4 + 3t \in P_1[0, 1]$.

"Vi gör det, så att alla är med" — vilken kontrast mot Bernhards "nu har jag gjort det snabbt, på mitt sätt, så ni förhoppningsvis inte förstår och gör det hemma."

Bestäm koordinaterna för u i $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$:

$\mathcal{B}_1$ trivialt:

$$[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_2$:

$$\boldsymbol{u} = 3(1+t) + (4-3)1$$

$$[\boldsymbol{u}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exempel 2: koordinater i $\mathbb{R}^n$. Visa att vektorerna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är bas i $\mathbb{R}^3$. Bestäm koordinaterna för

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i denna bas.

Lösning: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ska hitta en linjärkombination av kolonnerna som ger $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Om lösningen är entydig så är basen OK.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \text{ entydigt} \Longrightarrow \text{basen är OK} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Alltså:

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_E$$

där

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Avbildningen A avbildar $\mathcal{B}$-koordinaterna på E-koordinaterna. A betecknas

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}_E$$

Allmänt gäller:

$$[\boldsymbol{x}]_E = P_B\,[\boldsymbol{x}]_B$$

Detta kallas **koordinatbytesformeln**. $P_{\mathcal{B}}$ kallas **koordinatbytesmatrisen**.

Kolonnerna i $P_{\mathcal{B}}$ är linjärt oberoende, för de är en bas $\Longrightarrow$ $P_{\mathcal{B}}$ är inverterbar och

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}[\boldsymbol{x}]_E$$

Exempel 1. $P_1[0,1]$, $E = \{1, t\}, \mathcal{B} = \{1, 1+t\}$

$$u = 4 + 3t$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$[u]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}[u]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I allmänhet beräknar man inte inversen, utan löser ekvationssystemet.

Sats: (8): Koordinatavbildningen

$$\boldsymbol{x} \in V \longrightarrow [\boldsymbol{x}]_B \in \mathbb{R}^n$$

om $\dim(V) = n$, är "omvändbar" och "på". Varje vektorrum V är isomorft med $\mathbb{R}^n$. $n = \dim =$ antal element i en bas.

Exempel 3.

Använd koordinatvektorer för att visa att $1 + 2t^2$, $4 + t + 5\,t^2$ och $3 + 2\,t$ är linjärt beroende i P_2.

Lösning: Standardbasen: $E = \{1, t, t^2\}$.

$$1 + 2t^2 \quad \text{har koordinaterna} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4 + t + 5\,t^2 \quad \text{har koordinaterna} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3 + 2\,t \quad \text{har koordinaterna} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Undersök om dessa koordinatvektorer är linjärt beroende i $\mathbb{R}^3$, lös $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Två pivotelement $\implies$ kolonnerna är linjärt beroende.

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polynomen är linjärt beroende och

$$5(1+2t^2) - 2(4+t+5t^2) + (3+2t) = 0$$

Lay 4.5 Dimension

SATS: (9): Låt V ha bas $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$. Då är varje uppsättning av fler än n vektorer i V linjärt beroende.

SATS: (10): Alla baser har lika många element.

DEFINITION: Dimensionen $\dim V$ är antalet element i en bas för V om n är ändligt. V är oändligtdimensionellt om V inte spänns av ett ändligt antal element.

EXEMPEL:

a) P_n har dimensionen $n+1$ eftersom antalet element i standardbasen är $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ är $n+1$.

b) $\mathbb{R}^n$ har dimensionen n ty standardbasen har n element.

c) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ = mängden av alla kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$. Detta är ett linjärt rum, dimensionen är oändlig.

Bevis. Funktionerna $1, t, t^2, \ldots, t^n$ är kontinuerliga och linjärt oberoende (de är bas för P_n). Gäller för alla n, godtyckligt stort $\implies \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \infty$. □