2006–03–14

Uppåt triangulära matriser:

$$\begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \\ 0 & X & \cdots & X \\ 0 & 0 & \ddots & X \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{pmatrix}$$

Anmärkning: Bara plan *genom origo* är underrum. I allmänhet kallas plan för *affina mängder*.

⟨fig2⟩.

$$M = \boldsymbol{u}_0 + H = \{\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \in H\}$$

Underrum som spänns av ett antal vektorer. Låt $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_p \in V$. Betrakta mängden

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p$$

där $c_j \in \mathbb{R}$. Denna mängd är ett linjärt underrum till V och betecknas

$$H = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^p$$

Lay 4.2

Repetition: Linjära ekvationssystem $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Låt $\boldsymbol{p}$ vara *en* lösning till $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Då kan den allmänna lösningen skrivas $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}_h$, där $\boldsymbol{v}_h$ är den allmänna lösningen till det homogena problemet $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$\mathrm{Nul}(A)$, nollrummet till A:

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

Värderummet (kolonnrummet) till A:

$$\mathrm{Col}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

$\mathrm{Nul}(A)$ är ett *underrum* till $\mathbb{R}^n$. $\mathrm{Col}(A)$ är ett underrum till $\mathbb{R}^m$. Kolonnrummet är det rum som spänns av kolonnerna i A.

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{a_j\}_{j=1}^n$$

Anmärkning: Lösningsmängden till $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är $\boldsymbol{p} + \mathrm{Nul}(A)$, vilket är en affin mängd.

Två sätt att se på produkten $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, A, x givna: hur beräknas $\boldsymbol{b}$?

1. Enligt matrisalgebran:

$$b_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

2. Effektivare:

$$\boldsymbol{b} = \sum_j x_j a_j$$

$\boldsymbol{b}$ är en linjärkombination av A:s kolonner. Row(A) är det rum som spänns av matrisens rader, ett linjärt underrum.

I MATLAB: nollrummet: `null(A)`, kolonnrummet `orth(A)`.

Vi vet Guasselimination (rad-reduktion) bygger på elementära radoperationer. Metoden fungerar ty radrummet är oförändrat vid elementära radoperationer. Motsvarande kolonnoperationer:

1. byta plats
2. multiplicera med tal $\neq 0$
3. addera multipel av en kolonn till en annan kolonn.

Col(A) förblir oförändrat vid elementära kolonnoperationer.

EXEMPEL. (Typtal) Bestäm Col(A) och Nul(A) till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Col(A) — kolonnoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Nul(A) — lösningar till homogena systemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$: Gausselimination:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parameterform: $x_4 = s$, $x_3 = t$.

$$x_2 = -\frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}t$$

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

||.

Linjära avbildningar, transformationer. En avbildning $T: V \to W$, $\boldsymbol{x} \in V$ avbildas entydigt på $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \in W$. $\boldsymbol{T}$ är *linjär* om

1. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$
2. $\boldsymbol{T}(c\,\boldsymbol{u}) = c\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$

Exempel 1. Spegling i en linje genom origo i $\mathbb{R}^2$. ⟨fig3⟩.

Exempel 2.

$$V = \mathcal{C}^1[0,1]$$

$$W = \mathcal{C}^0[0,1]$$

$$f \in V, T(f) = f' \in W, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad g \in V$$

$$T(c\,f + d\,g) = (c\,f + d\,g)' = c\,f' + d\,g' = c\,T(f) + d\,T(f)$$

Derivering är en *linjär* avbildning.

||.

Nollrummet (kärnan, *kernel*) av T definieras

$$\mathrm{Nul}(T) = \{u: T(u) = \mathbf{0}\}$$

Värderummet av T defineras:

$$V(T) = \{T(u), u \in V\}$$

Anmärkning: om $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ och $T(x) = A\,x$ så är $\mathrm{Nul}(T) = \mathrm{Nul}(A)$ och $V(T) = \mathrm{Col}(A)$.

I exempel ett är nollrummet origo. Värderummet är alla vektorer, dvs $\mathbb{R}^2$.

I exempel 2 är $\mathrm{Nul}(T)$ mängden av konstanta funktioner och värderummet $V(T) = W$.

Övning: Vinkelrät projektion på en linje genom origo ⟨fig4⟩

Fråga: Bestäm nollrum och värderum till avbildningen.

Lay 4.3 Linjärt oberoende, bas

En mängd vektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ är linjärt oberoende om

$$c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$$

De är linjärt beroende om det gäller utan att alla $c_j = 0$.

Exempel 1.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spänner $\mathbb{R}^n$ ty:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ är en godtycklig vektor, kan skrivas:}$$

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{e}_n$$

Exempel 2. Vektorerna i exempel ett är linjärt oberoende ty

$$c_1\,\boldsymbol{e}_1 + c_2\,\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{e}_n = 0$$

$$\mathrm{VL} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{\text{när?}}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_j = 0\ \forall\, j$$

Definition: En mängd vektorer är bas i V om

1. mängden är linjärt oberoende
2. mängden spänner V.

("Vem vill inte vara både oberoende och spännande?")

Exempel 3. Mängden $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ är en bas enligt exempel ett och två ovan.

Exempel 4. $V = P_n$ är polynom av grad $\leqslant n$.

$$B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$$

1. B spänner V ty $p \in V$ kan skrivas $p = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_{n+1}\, t^n$.
2. B är linjert oberoende ty:

$$c_1 + c_2\, t + \cdots + c_{n+1}\, t^n = 0 \quad \forall t$$

$\Longrightarrow c_1 = 0$, (testa $t = 0$) derivera:

$$c_2 + 2\, c_3\, t + \cdots + n\, c_{n+1} t^{n-1} = 0$$

$\Longrightarrow c_2 = 0$. Fortsätt derivera: $c_j = 0,\ j = 1, \ldots, n+1$.