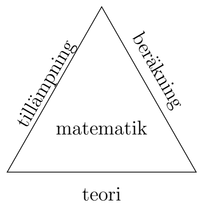
2006–03–13



Figur 1.

Linjär algebra

Tre beräkningsområden för linjär algebra. Byggstenar för tekniska beräkningar, även icke-linjära sådana.

1. Linjära ekvationssystem: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$.

   Tillämnpning $(m=n)$: Enkla: kryptografi; svåra: partiell diferentialekvation + finita elementmetoden $\rightarrow$ stort linjärt ekvationssystem.

   Matlab: `x = A\b`

   Metod: Gausselimination.

2. Minsta-kvadrat-metoden: överbestämt ekvationssystem. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, A\in\mathbb{R}^{m\times n}, m>n$.

   Matlab: `x = A\b`

   Metod: QR-faktorisering, alternativt (sämre), normalekvation: $A^TA\,\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$.

   Tillämpning: Enkel: höjd över havet. Residual felfaktor $\boldsymbol{r}=A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$.

3. Egenvärdesproblem: $A\,\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, A\in\mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}$

   Tillämpningar: Allt som svänger och vibrerar, kvantfysik. Enkel: bestäm max och min av funktionen $4\,x^2-2\,y^2+4\,z^2+12\,x\,y+4\,y\,z$ på sfären $x^2+y^2+z^2=3$.

   Matlab: `eig`

Lay 4.1 Linjära rum

Generalisering av det vi kan göra med geometriska vektorer och vektorer i $\mathbb{R}^n$.

- Addition: $\nearrow\boldsymbol{u}$, $\searrow\boldsymbol{v}$, $\longrightarrow\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$
- Multiplikation med skalär: $\rightarrow\boldsymbol{u}, \longrightarrow 2\boldsymbol{u}$

Ekvationen $\boldsymbol{w}\oplus\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är givna, sök $\boldsymbol{w}$.

Påstående: $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\oplus(-\boldsymbol{u})$ (entydig) som vi skriver $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\ominus\boldsymbol{u}$.

Bevis. $\boldsymbol{w}$ är lösning ty:

$$\boldsymbol{w}\oplus\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}\oplus(-\boldsymbol{u}))\oplus\boldsymbol{u}\overset{(3)}{=\!=}\boldsymbol{v}\oplus((-\boldsymbol{u})\oplus\boldsymbol{u})\overset{(5)}{=\!=}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}\overset{(4)}{=\!=}\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{w}$ är den enda lösningen, ty antag att $\hat{\boldsymbol{w}}$ vore en lösning:

$$\hat{\boldsymbol{w}}\oplus\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\overset{(\star)}{\Longrightarrow}\hat{\boldsymbol{w}}\oplus\boldsymbol{u}\oplus(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}\oplus(-\boldsymbol{u})\overset{(5)}{\Longrightarrow}\hat{\boldsymbol{w}}\oplus\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}\oplus(-\boldsymbol{u})\Longrightarrow\hat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{v}\oplus(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{w}$$

$(\star)$: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Longrightarrow \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}$ följer av entydigheten i (1). $\square$

"Ni har gått med på att det här fungerar för att läraren säger det – och det är OK. Tills vidare."

EXEMPEL på linjära rum: geometriska vektorer, vektorer i $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$-matriser.

$V = F(D)$ är mängden av funktioner definierade på en definitionsmängd D.

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(\alpha \odot f)(t) = \alpha\, f(t)$$

$\mathbf{0}$ är funktionen $\mathbf{0}(t) = 0$, alla t.

$$(-f)(t) = -f(t)$$

$V = \mathbb{R}^+$ med operationerna $u \oplus v = u \cdot v$, $\alpha \odot u = u^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^+$ är ett linjärt rum.

Bevis. Räkneregel ett:

$$u, v \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow u \oplus v = u\, v \in \mathbb{R}^+$$

Räkneregel sju:

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (u \oplus v)^\alpha = (u\, v)^\alpha = u^\alpha\, v^\alpha = \alpha \odot u + \alpha \odot v$$

Räkneregel åtta:

$$(\alpha + \beta) \odot u = u^{a+\beta} = u^\alpha\, u^\beta = \alpha \odot u + \beta \odot u \qquad \square$$

TENTAUPPGIFT: 2003–01–13

1.c) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Låt $A \oplus B$ vara vanlig matrisaddition. $\alpha \odot A = A^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Är detta ett linjärt rum?

Svar: Nej. Regel åtta:

$$(\alpha + \beta) \odot A = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta \stackrel{?}{=\!=} A^\alpha + A^\beta$$

ta t.ex. $A = I, \alpha = \beta = 1$.

Underrum

EXEMPEL plan i $\mathbb{R}^3$ genom origo.

$H \subseteq V$ så att H själv är ett linjärt rum med samma definition av räknereglerna $\oplus$ och $\odot$. H är ett underrum om:

1. $u, v \in H \Longrightarrow u \oplus v \in H$.
2. $u \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha \odot u \in H$.
3. $\mathbf{0} \in H$. (Följer egentligen av regel 2.)

EXEMPEL på underrum bland matriser.

$V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Är mängden symmetriska matriser ett underrum? $H = \{A \in V, A^T = A\}$.

Svar: Ja.

Låt $V = F(I)$ vara funktioner på ett intervall. $H = P_n(I)$ är mängden polynom av grad $\leqslant n$ är ett underrum!

FRÅGA: Är mängden polynom av grad $= n$ ett underrum?

Är mängden ortogonala matriser ett linjärt underrum?

A är orgotonal $\Longleftrightarrow A^T A = I$.