

3.1.7

$$f(z) = z^4 + 3iz^2 + z - 2 + i$$

se antalet nollställen i öhp

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

för tillräckligt stora R ligger alla nollställen i öhp innanför Γ_R ($f(z) \rightarrow \infty$ då $z \rightarrow \infty$)

Argumentprincipen: $N_f - P_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z)$

Polynomi: $P_f = 0$

$[-R, R]: z = x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4 + 3ix^2 + x - 2 + i = (x^4 + x - 2) + i(3x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \geq 1 \text{ på } [-R, R]$$

$x = \pm R: \operatorname{Re} f \sim R^4 \rightarrow \infty$

$\operatorname{Im} f \sim 3R^2 \rightarrow \infty$

$\operatorname{Re} f \gg \operatorname{Im} f$

på $C_R: z = Re^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$f(Re^{i\theta}) = R^4 e^{4i\theta} \left(1 + 3i \frac{1}{R^2} e^{-2i\theta} + \frac{1}{R^3} e^{-i\theta} - \frac{2}{R^4} e^{-4i\theta} + \frac{i}{R^4} e^{-4i\theta} \right)$$

andra faktorn varierar mycket nära 1 $\rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$

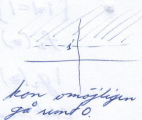
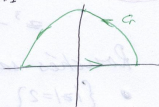
$\arg f(Re^{i\theta}) = 4\theta + \arg(1 + \frac{i}{R^4})$

Ändringen kommer från $4i\theta$

$[0, \pi] \quad \frac{1}{2} \text{ varv: } 4\theta \text{ ger två varv.}$



två varv, två nollställen.



3.1.12

Bestäm antal nollställen till

$$z^3 - 3z + 1 \quad \text{i} \quad \{1 < |z| < 2\}$$

Rouché's sats:

- $\{|z|=2\}$ Dominant term: z^3 .

$$f_1(z) = z^3 \quad g_1(z) = -3z + 1$$

$$|g_1(z)| = |-3z + 1| \leq |-3z| + |1| = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$|f_1(z)| = 8 \quad |g_1(z)| < |f_1(z)|$$

f_1 och $f_1 + g_1$ har lika många nollställen i $\{|z| < 2\}$, dvs tre nollställen.

- $\{|z|=1\}$

$$f_2(z) = -3z \quad g_2(z) = z^3 + 1$$

$$|g_2(z)| = |z^3 + 1| \leq |z^3| + 1 = 2 < |f_2(z)| = 3$$

Ett nollställe.

- $\{1 < |z| < 2\} \setminus \{|z|=1\} = \{1 < |z| < 2\}$

På $\{|z|=1\}$. Om polynomet = 0

$$\text{så } f_2(z) = -g_2(z) \Rightarrow |f_2| = |g_2|$$

Omöjligt $\Rightarrow$ inga nollställen på enhetscirkeln.

- $3 - 1 = 2$ nollställen i $\{1 < |z| < 2\}$

8.1.14 $f(z) = ze^z - \frac{1}{4}$. Lok. antal nollställen i $\{0 < |z| < 2\}$.

$$|z| \approx 0 \Leftrightarrow z = 0 : f(0) = -\frac{1}{4} \neq 0$$

$$\{|z| = 2\} \quad |ze^z| = |z| \cdot |e^z| = 2e^{\operatorname{Re} z} \geq 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

$$|-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

$$e^2 < 8 \quad \text{ty} \quad e < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,82$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e^2} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ze^z och $ze^z - \frac{1}{4}$ har lika många nollställen: ett.

$$ze^z - \frac{1}{4} \neq 0 \quad \text{i} \quad z = 0$$

$\Rightarrow \exists$ ett nollställe i $\{0 < |z| < 2\}$

2006-10-10

räkn

3.1.22

Ena algebraens fundamentalsats
mha Liouvilles sats.

Algebraens fundamentalsats

Ett polynom av grad $n \geq 1$ har
minst ett nollställe i $\mathbb{C}$.

(Genom faktorisering: n nollställen exakt.)

Beris $P(z)$, $\deg P \geq 1$.

Antag att $P(z) \neq 0$ i $\mathbb{C}$.

P analytisk, $P \neq 0$ i $\mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{P}$ analytisk i $\mathbb{C}$
hel

$P \rightarrow \infty$ då $z \rightarrow \infty$: $|P(z)| \geq |a_n z^n| - |\text{lägre potenser}|$
 $\neq 0$ $n \geq 1$ $\rightarrow \infty$ då $z \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \exists R: \forall z \in \{ |z| > R \} \quad \left| \frac{1}{P(z)} \right| < 1$

$\{ |z| \leq R \}$ kompakt mängd, $\frac{1}{P}$ kontinuerlig
 $\Rightarrow$ begränsad av M

$\Rightarrow \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq M$

$\frac{1}{P}$ är en begränsad, hel funktion

Liouville: $\frac{1}{P} = \text{konstant}$

$\Rightarrow P = \text{konst}$

Motsägelse, $\deg P \geq 1$.

3.4.15

 $f = u + iv$ analytisk, $f'(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ nivåkurvorna $u = (u(z_0)) = u(x_0, y_0)$ och $v = v(z_0) = v(x_0, y_0)$

är ortogonala.

 $z_0 = (x_0, y_0)$

Normal till nivåkurvor, gradienten.

$$\nabla u(z_0) \cdot \nabla v(z_0) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Cauchy-
Riemann

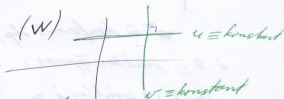
$$-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

(z)

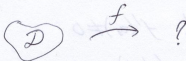


(w)



vinkelräta nga konformitet

$$(f'(z_0) \neq 0)$$

Problemtyp
①

②

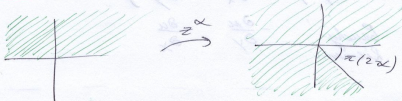


③



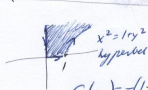
3.4.1.2

$$z^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2$$


 z^α är konform i öpp, utom i 0.

 $\alpha > 0$: vinklar öppnas; $\pi \mapsto \alpha\pi$
 $(z-z_0)^\alpha$ vinklar i z_0 .

⑤



$$G(z) = -(1-z^2)^2$$

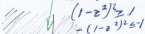
$$\left. \begin{array}{l} z = iy \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$z^2 = -y^2 \leq 0$$

alla negativa reella tal

$$(1-z^2)^2 \geq 1$$

$$(1-z^2)^2 \leq 1$$



$$\left. \begin{array}{l} z = x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq z^2 \leq 1 \\ 0 \leq 1-z^2 \leq 1 \\ 0 \leq (1-z^2)^2 \leq 1 \\ -1 \leq -(1-z^2)^2 \leq 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = x+iy \\ x^2 - y^2 = 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$1 - z^2 = -2xyi$$

$$(1-z^2)^2 = -4x^2y^2$$

$$-(1-z^2)^2 = 4x^2y^2 \geq 0$$

2006-10-10

räkneövning komplex

(3.5.3)

$$D = \{z = x + iy : |y-1| < 2\}$$

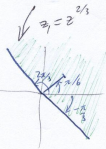
 $D \xrightarrow{f} \text{öhp}$

 $\downarrow e^z$

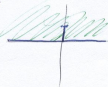

$$w = \exp\left(\frac{\pi}{4}(z+i)\right)$$



(13)


 $\begin{matrix} ? \\ \rightleftarrows \end{matrix} \text{öhp}$


$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1$$



$$w = (z_2^2 + 1)^{1/2}$$

2006-10-10

4.4.9



?
öhp

$\downarrow z_1 = \frac{1}{2}$



$\text{Re} \mapsto \text{Re}$
 $0 \mapsto \infty$
 cirkeln $\perp \text{Re}$
 $\mapsto$ cirkeln $\perp \text{Re}$
 $\infty \mapsto 0$ integrin

flytta
 rottera
 skala om
 $\exp()$