

2.4.5.

$$f(z) = z^2 (1 - \cos z)$$

nollställen? multiplicitet,?

 $z_0 = 0$. Taylorutveckling:

$$f(z) = z^2 \left(1 - 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$$

Multiplicitet 4: $f(z) = z^4 \left(\frac{1}{2} - \dots \right)$.

Övriga nollställen hittas genom $\cos z = 1$.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2$$

$$e^{2iz} + 1 = 2e^{iz}$$

$$t = e^{iz}, \quad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0: \quad t_1 = t_2 = 1.$$

$$e^{iz} = 1 \quad \text{in } \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$iz = \log 1 = i \cdot 2k\pi$$

$$z_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

är nollställen till $f(z)$.För att bestämma multiplicitet är den relevanta funktionen $g(z) = 1 - \cos z_k$.

$$g(z_k) = 1 - \cos z_k = 0$$

$$g'(z_k) = \sin z_k = \sin 2k\pi = 0$$

$$g''(z_k) = \cos z_k = 1 \neq 0$$

 $\Rightarrow z_k$ har multiplicitet 2 om $k \neq 0$.

2006-09-26

räkneövning i komplex analys

2.4.10Taylorutveckla e^z kring $z_0 = \pi i$

1. $f(\pi i) = -1$

$f'(\pi i) = -1 \quad (f^{(n)}(z) = e^z)$

$f^{(n)}(\pi i) = -1$

$$e^z = -1 - (z - \pi i) - \frac{1}{2!} (z - \pi i)^2 - \dots$$

2.
$$e^z = e^{\pi i} \cdot e^{z - \pi i} \xrightarrow{z \rightarrow \pi i} 0 =$$
$$= - \left(1 + (z - \pi i) + \frac{1}{2!} (z - \pi i)^2 + \dots \right)$$

2.4.13Taylorutveckla $\frac{z+2}{z+3}$ kring $z_0 = -1$ $\Leftrightarrow$ i potenser av $z+1$.

$$\frac{z+2}{z+3} = \frac{(z+1)+1}{(z+1)+2} \stackrel{\text{klara}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{(z+1)+1}{1 + \frac{z+1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 + (z+1)) \left(1 - \frac{z+1}{2} + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(z+1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)(z+1)^2 + \dots \right)$$

eller
$$\frac{z+3-1}{z+3} = 1 - \frac{1}{(z+1)+2} = \dots$$

2006-09-26

2.4.17

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisk

f har nollställe i $z_0 \in D$ med multiplicitet $m \geq 1$

? (a) f' har nollställe i z_0 med multiplicitet $m-1$.

? (b) f^2 — " — $2m$.

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1} + \dots$$

$a_m \neq 0$.

$$f'(z) = m a_m (z-z_0)^{m-1} + \dots$$

$$m a_m \neq 0$$

z_0 är alltså ett nollställe med multipliciteten $m-1$.

$$[f(z)]^2 = (a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1} + \dots)(a_m (z-z_0)^m + \dots) =$$

$$= a_m^2 (z-z_0)^{2m} + \dots$$

$$a_m \neq 0 \Rightarrow a_m^2 \neq 0$$

$\therefore z_0$ nollställe m mult. $2m$ till f^2 .

(2.4.18) Cauchys uppskattningar av derivatorna.

f är analytisk på $\{z : |z - z_0| \leq r\}$.

$$\text{För } n \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Cauchys integralformler för derivatorna:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{|s-z_0|=r} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \max_{|s-z_0|=r} |f(s)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

$|f|$ kontinuerlig $\Rightarrow$ begr. på kompakt mängd.

(2.4.20)

för en hel funktion

$$\operatorname{Re} f \leq c \text{ i } \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{konstant}$$

Liouvilles sats: $\tilde{f}$ hel, $|\tilde{f}| \leq M \Rightarrow \tilde{f} \equiv \text{konst}$

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w} (\cos(\operatorname{Im} w) + i \sin(\operatorname{Im} w))$$

$$F(z) = \exp(f(z))$$

$$|F(z)| = \exp(\operatorname{Re} f(z)) \leq \underbrace{e^c}_{\text{konstant}}$$

Enligt Liouvilles sats $F \equiv f$

$$e^{f(z)} \equiv \text{konst.}$$

$$(e^{f(z)})' \equiv 0 \quad \text{vet vi.}$$

$$\underbrace{e^{f(z)}}_{\text{konst} \neq 0} \cdot f'(z) \equiv 0 \Rightarrow f'(z) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \equiv \text{konst.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} f \geq c \\ \operatorname{Im} f \leq c \\ \operatorname{Im} f \geq c \end{array} \right\} f \text{ konstant}$$

2.4.21 f hol, $\exists A, m \geq 0$:

$$|f(z)| \leq A|z|^m \text{ f\"or } |z| \geq \ell_0$$

?
 $\Rightarrow f$ polynom av grad. högst m .
 $\Leftrightarrow f^{(n)} \equiv 0 \quad \forall n > m$

$m=0$: Liouville's sats.

$n > m$:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

F\"or $z_0 \in \mathbb{C}$ godtyckligt.

$$r > |z_0| + \ell_0$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} A \cdot \max_{|z-z_0|=r} |z|^m = \left(\text{Diagram of a circle centered at } z_0 \text{ with radius } r \right)$$

$$= \frac{An!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |(z-z_0+z_0)^n| \leq \frac{An!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} (|z-z_0|^n + \text{coeff. l\"agre potenser})$$

$$= A \frac{n!}{r^n} (r^m + \text{l\"agre potenser})$$

$$n > m \Rightarrow \begin{matrix} \hookrightarrow \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = 0 \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0$$

$$z_0 \text{ godt.} \Rightarrow f^{(n)} \equiv 0.$$

2.5.2

$$\frac{z^2}{\sin z} \quad \text{singulariteter i nollst. krt}$$

$$\sin z = 0 \quad z_n = n\pi$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz}$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz} = 1$$

$$2iz = \log 1 = 0 + i(0 + 2n\pi)$$

$$z_n = n\pi.$$

isolerade singulariteter.

$n=0$: $z_0=0$ blir en härbär singularitet

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{z}{\sin z} \right) = 0$$

$\Rightarrow z_0=0$ härbär.

$$n \neq 0: \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z^2}{\sin z} = \infty$$

$\Rightarrow z = n\pi, n \neq 0$ blir en pol.

Ordning?

$$\left. \begin{array}{l} \sin n\pi = 0 \\ \cos n\pi \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n\pi \text{ är enkelt nollställe till } \sin z.$$

$$\sin z = A(z - n\pi) + \dots$$

$A \neq 0$

$$f(z) = \frac{z^2}{A(z - n\pi) + \dots} = \frac{1}{z - n\pi} \cdot \frac{z^2}{A + \dots} \quad g$$

g är analytisk i $n\pi$. $g(n\pi) \neq 0$

$$g(z) = b_0 + b_1(z - n\pi) + \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{b_0}{z - n\pi} + b_1 + b_2(z - n\pi) + \dots$$

entelad

2.5.7 Laurent $\frac{e^z - 1}{z^2}$ kringo.

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \dots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \dots$$

$\forall z \neq 0, \quad \{1 \neq 0\}$ $\Rightarrow$ en enkel pol.

2.5.9 $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}, \quad z_0 = \pi$

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} &= \frac{\sin(\pi - z)}{(z-\pi)^2} = - \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} = \\ &= - \frac{1}{z-\pi} + \frac{z-\pi}{3!} - \dots \end{aligned}$$

2.5.12 $\frac{1}{e^z - 1}; \quad z_0 = 0;$ fyra kringor.

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \dots}$$

$\uparrow$
 $\neq 0$

0 är en enkel pol.

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{a_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow 1 = \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \right) \left(\frac{a_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right)$$

$$z^0: 1 = 1 \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$z^1: 0 = a_0 + \frac{1}{2} a_1 \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{1}{2}}$$

$$z^2: 0 = a_1 + \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{6} a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$$

$$z^3: 0 = a_2 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{24} a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{720}}$$