2006–10–19

Tentan i augusti:

$$a_{n+2} - 3\,a_{n+1} + 2\,a_n = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1$$

$$\overset{z}{\supset} \quad z^2\,A(z) - z^2 \cdot 1 - z(-1) - 3(z\,A(z) - z \cdot 1) + 2\,A(z) = 0$$

$$(z^2 - 3\,z + 2)\,A(z) = z^2 - 4z$$

$$A(z) = \frac{z^2 - 4\,z}{z^2 - 3\,z + 2} = \frac{z^2 - 3\,z + 2 - z - 2}{z^2 - 3\,z + 2} = 1 - \frac{z + 2}{z^2 - 3\,z + 2} =$$

$$= 1 - \frac{z + 2}{(z - 1)(z - 2)}$$

$$\frac{z + 2}{(z - 1)\,(z - 2)} = \frac{\mathrm{A}}{z - 1} + \frac{\mathrm{B}}{z - 2}$$

$$z + 2 = \mathrm{A}(z - 2) + \mathrm{B}(z - 1)$$

$$z = 2: \quad 4 = \mathrm{B} \cdot 1$$

$$z = 1: \quad 3 = -A$$

$$\Longrightarrow A(z) = 1 + \frac{3}{z - 1} - \frac{4}{z - 2}$$

Vi vill ha den yttersta Laurentutvecklingen kring 0. $|z| > 2$.

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \quad \text{konvergent för } |z| > 1$$

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \cdots \quad \text{konvergent för } |z| > 2$$

$$A(z) = 1 + (3 - 4)\frac{1}{z} + (3 - 4 \cdot 2)\frac{1}{z^2} + \cdots + \left(3 - 4 \cdot 2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} + \cdots$$

$$a_n = 3 - 2^{n+1}$$

Kontrollerar begynnelsevillkor:

$n = 0 \longmapsto 3 - 2 = 1$ OK.

$n = 1 \longmapsto 3 - 4 = -1$ OK.

L^2: “alla funktioner som har en integrerbar kvadrat.

S: “Schwarz”

S'.

Alla dessa klasser har egenskapen att Fouriertransformen inte lämnar klassen. För Laplacefunktioner är det inte riktigt så enkelt.

$$|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{at}$$

$$f \quad \overset{\mathcal{L}}{\supset} \quad F \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{analytisk för } \operatorname{Re} s > a \\ F(s) \longrightarrow 0 \text{ då } \operatorname{Re} s \to \infty \end{array} \right. \quad \text{nödvändiga villkor}$$

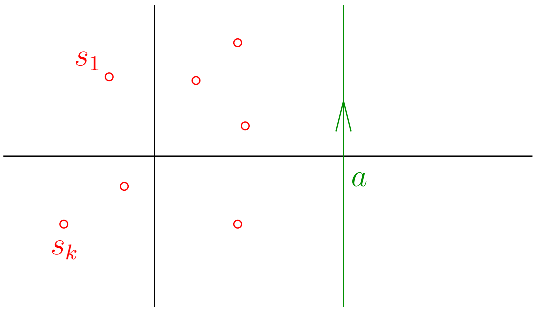
SATS: $g(s)$ analytisk i $\mathbb{C}$ utom i ändligt många punkter $s_1, s_2, \ldots, s_k$. $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$.

$$\Longrightarrow g = \mathcal{L}(f) \quad \text{där } f(t) = \sum_{s_j} \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{st} g(s)\right)$$

Dessutom:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} g(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \left\{ \begin{array}{ll} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{array} \right.$$

där $a > \operatorname{Re} s_j$, $j = 1, \ldots, k$. Se figur 1.



Figur 1.

$$\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} = \lim_{R \to \infty} \int_{a-\mathrm{i}R}^{a+\mathrm{i}R}$$

Bevis. Tag $a > \operatorname{Re} s_j$, $j = 1, \ldots, k$. ⟨fig2⟩

$$\Gamma_R = \gamma_r \cup C_r$$

$$\Gamma_R' = (-\gamma_R) \cup C_R'$$

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} g(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} (\pi R + 2\,R) \max_{\Gamma_{R_0}} |g(s)| \cdot \max_{\Gamma_{R_0}} |\mathrm{e}^{st}| \leqslant$$

$$\left[\max_{\Gamma_{R_0}} |\mathrm{e}^{st}| = \max_{\Gamma_{R_0}} \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(st)} = \max_{\Gamma_{R_0}} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} s}, \operatorname{Re} s \leqslant a \right]$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi} (\pi + 2)\,R \max_{\Gamma_{R_0}} |g(s)|}_{=M} \cdot \mathrm{e}^{at}$$

Vi gör detta för fixt R_0 så att Γ_{R_0} går runt $s_1, \ldots s_k$.

$$|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{at} \quad \forall t > 0$$

$$\Longrightarrow f \text{ har en Laplacetransform.}$$

Vi frågar oss, är $\mathcal{L}(f) = g$? Låt $R \geqslant R_0$.

$$(\mathcal{L}f)(s) = F(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^\infty \left(\int_{\Gamma_R} g(z)\,\mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= [\text{Fubinis sats}] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} g(z) \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{(z-s)t}\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} g(z)\, \frac{1}{z-s} \left[\mathrm{e}^{(z-s)t} \right]_0^\infty \mathrm{d}z =$$

$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} z$, s till höger om Γ_R:

$$= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z$$

$s\colon \operatorname{Re} s > a$. Tag $R\colon |s-a| < R \Longrightarrow s$ innanför Γ_R'. För sådant s:

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R'} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z$$

ty g är analytsik på och innanför Γ_R' och $s \in \operatorname{inre}(\Gamma_R')$.

$$F(s) = \ldots = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z$$

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_R'} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z$$

$g(s) - F(s) \stackrel{?}{=} 0$.

$$g(s) - F(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_R'} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathrm{Cirkeln}_R} \frac{g(z)}{z-s}\,\mathrm{d}z$$

$$\Longrightarrow |g(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max_{\mathrm{Cirkeln}_R} |g| \cdot \frac{1}{R - |s-a|} \longrightarrow 0 \text{ då } R \to \infty, \text{ ty } g(z) \to 0 \text{ då } z \to \infty$$

$$\left[\frac{1}{z-s} = \frac{1}{\underbrace{(z-a)}_{=R} - (s-a)} \right]$$

Uttryck oberoende av R som går mot noll:

$$g(s) - F(s) = 0$$

$$g(s) = F(s)$$

$$g(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

Första delen av satsen klar.

⟨fig3⟩ Kan jag låta $R \to \infty$?

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} g(s)\, \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s$$

$$\int_{C_R} \ldots \xrightarrow{?} 0$$

$t > 0$: Variabelbyte: $-\mathrm{i}(s - a) = w$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Jordans lemma}\\ g \underset{\infty}{\longrightarrow} 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{C_R} \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow$ för $t > 0$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} g(s)\, \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s$$

$t < 0$: $w = \mathrm{i}(s - a)$.

$$\Longrightarrow \int_{C'_R} \longrightarrow 0$$

$$\int_{\Gamma'_R} g(s)\, \mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}t = 0 \qquad \square$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{då } x > 0 \\ 0, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$\hat{\theta} = ?$ (Finns inte i vanlig funktionsmening.)

$$\theta'(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \infty, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Paul Dirac. Diracs δ-funktion:

"Definition":

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

(δ är inte en funktion. Det är en distribution.)

f kan karakteriseras med punkter som $f(x)$, eller med hur den verkar på en annan funktion φ enligt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.

$$(\delta, \varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi(0)$$

$$(f', \varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} -(f, \varphi')$$

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi})$$

$$\hat{\delta} \equiv 1$$

$$\mathcal{L}(\delta) \equiv 1$$