2006–10–17

Uppgift 5.3.4

$$\mathcal{L}u = ?$$

$$u(t) = \mathrm{e}^{-Bt}\cos At$$

cos: 15. e: 3.

$$\cos At \quad \supset \quad \frac{s}{s^2 + A^2}$$

$$\mathrm{e}^{-Bt} f(t) \quad \supset \quad F(s+B)$$

$$\mathrm{e}^{-Bt}\cos AT \quad \supset \quad \frac{s+B}{(s+B)^2 + A^2}$$

Det naturliga här är $A, B \in \mathbb{R}$, men formeln gäller även om de är komplexa.

Härledning $(A, B \in \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-Bt}\cos(At)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{e}^{-Bt}\cos(At) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-B+\mathrm{i}At)}\right)$$

$$\mathcal{L}(u)(s) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-B+\mathrm{i}A-s)t}\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\,\frac{1}{-(s+B)+\mathrm{i}A}\left[\mathrm{e}^{-(s+B)t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}At}\right]_0^\infty =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{för } s+B>0\\ s>-B\end{bmatrix} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{(s+B)-\mathrm{i}A} = \mathrm{Re}\,\frac{s+B+\mathrm{i}A}{(s+B)^2+A^2} = \frac{s+B}{(s+B)^2+A^2}$$

$$\mathcal{L}u(s) = \frac{s+B}{(s+B)^2+A^2}$$

även för $s \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,s > -B)$.

$A, B \in \mathbb{R}$:

$$|u(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-Bt}$$

$$\Longrightarrow \exists \mathcal{L}u, \quad \text{analytisk i } \mathrm{Re}\,s > -B$$

Beteckna $\mathcal{L}u = U$. $U(s)$ och $\frac{s+B}{(s+B)^2+A^2}$ är två analytiska funktioner för alla s: $\mathrm{Re}\,s > -B$, sammanfaller på realaxeln. Deras skillnad är analytisk i $\mathrm{Re}\,s > -B$, $= 0\ \forall s > -B$. Då är skillnaden $\equiv 0$.

$$\Longrightarrow U(s) \equiv \frac{s+B}{(s+B)^2+A^2} \quad \forall s\colon \mathrm{Re}\,s > -B$$

Identitetssatsen. f, g analytiska i D. $f = g$ på en mängd med hopningspunkter (dvs det finns åtminstone en icke-isolerad punkt i mängden).

$$\Longrightarrow f \equiv g \quad \text{i hela } D$$

ty $f - g$ har icke-isolerat nollställe $\Rightarrow f - g \equiv 0$. ♫

Uppgift 5.3.11

$$u(t)=\left\{\begin{array}{ll}0, & t<0\\ \frac{\sin t}{t}, & t>0\end{array}\right.$$

Tabell: 14, 9.

$$14: \quad \sin t \quad \supset \quad \frac{1}{s^2+1}$$

$$9: \quad \frac{1}{t}f(t) \quad \supset \quad \int_s^\infty F(w)\,\mathrm{d}w$$

$$u \quad \supset \quad \int_s^\infty \frac{\mathrm{d}w}{w^2+1}=\frac{\pi}{2}-\arctan(s)$$

$s\in\mathbb{R}$.

5.4.2

$$u''+9u=\left\{\begin{array}{ll}1, & 0<t<\pi\\ 0, & \pi<t<\infty\end{array}\right.$$

$$u(0)=1, \quad u'(0)=0$$

$$u' \quad \supset \quad s\,U(s)-u(0)$$

$$u'' \quad \supset \quad s\,(s\,U(s)-u(0))-u'(0)=s^2\,U(s)-s\,u(0)-u'(0)$$

$$\left.\begin{array}{c}u''+9u=f\\ u(0)=1\\ u'(0)=0\end{array}\right\} \quad \supset \quad s^2\,U(s)-s\cdot 1-0+9\,U(s)=F(s)$$

$$F(s)=\int_0^\pi 1\cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\left[\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\pi=-\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{-\pi s}-1)=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-\pi s})$$

$$\Longrightarrow U(s)=\frac{s+\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+9}=$$

$$=\frac{s}{s^2+9}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+9}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\pi s}\frac{1}{s^2+9}$$

$$\frac{s}{s^2+9} \quad \overset{15}{\subset} \quad \cos 3t$$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+9} \quad \overset{14,7}{\subset} \quad \frac{1}{3}\int_0^t \sin 3\tau\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{9}(\cos 3\,t-1)$$

$$\mathrm{e}^{-\pi s}\cdot\underbrace{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+9}}_{\subset\frac{1}{9}(1-\cos 3t)} \quad \overset{2}{\subset} \quad \theta(t-\pi)\,\frac{1}{9}\,(1-\cos 3(t-\pi))$$

***z*-transform** Diskret analog till Laplacetransform. $\{a_j\}_{j=0}^\infty$

$$\mathcal{Z}(a_j)(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

$|z|>R$.

$b_j = a_{j+1}$

$$\mathcal{Z}(a_{j+1})(z) = \mathcal{Z}(b_j)(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_n}{z^n} + \cdots =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{z} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{z^n} + \cdots = z\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}}\right) =$$

$$= z \cdot \mathcal{Z}(a_j)(z) - z \cdot a_0$$

$b_j = a_{j+k}$ induktivt:

$$\mathcal{Z}(a_{j+k})(z) = z^k\,\mathcal{Z}(a_j)(z) - z^k \cdot a_0 - z^{k-1}a_1 - \cdots - z\,a_{k-1}$$

$$\mathcal{Z}(a_j)\cdot\mathcal{Z}(b_j) = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots\right) =$$

$$= a_0\,b_0 + \frac{1}{z}(a_0\,b_1 + a_1\,b_0) + \frac{1}{z^2}(a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{z^n}(a_0 b_n + a_1\,b_{n-1} + \cdots + a_n\,b_0) + \cdots =$$

$$= \mathcal{Z}(c_j)(z),\ \text{där } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,b_{n-k}$$

Faltning av $\{a_j\} * \{b_j\}$.

Laplace: $|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{at}$

$\mathcal{Z}$: $|a_n| \leqslant M r_0^n$. (för konvergensens skull)

Uppgift 5.5.4

$$a_j = \begin{cases} 0, & j \text{ udda} \\ \frac{1}{j!}, & j \text{ jämnt} \end{cases}$$

Om j är jämnt: $j = 2k, k = 0, 1, \ldots$

$$a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}$$

$$\mathcal{Z}(a_j)(z) = 1 + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots + \frac{1}{(2k)!\,z^{2k}} + \cdots = \cosh\frac{1}{z}$$

Uppgift 5.5.11

$$\mathcal{Z}(a_j)(z) = z\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} - 1\right) = z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} - z\cdot 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_n = b_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^n} + \cdots$$

$D \subset \mathbb{C}$. D område: öppen och sammanhängande.

$f\colon D \to \mathbb{C}$.

DEFINITION:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

om gränsvärdet finns.

Existensen av derivata är ett starkt krav. $f(z) = \bar{z}$ är ej deriverbar någonstans.

Intressanta sätt att närma sig en punkt är med $\Delta z = h$, $\Delta z = \mathrm{i}k$ med h, $k \in \mathbb{R}$. I båda fallen måste det bli samma derivata, vilket ger Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$$

(Cauchy-Riemanns ekvationer som nödvändigt villkor för deriverbarhet.) $f(z) = \bar{z}$ uppfyller ej Cauchy-Riemanns ekvationer någonstans: ej deriverbar. I beviset av Cauchy-Riemann fick vi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

DEFINITION: f analytisk i D (holomorf) om $\exists f'$ i området D. f är analytisk i z_0/på γ betyder att f är anlaytisk i en omgivning till z_0 respektive γ.

Cauchy-Riemanns ekvationer som tillräckligt villkor för analyticitet:

$f\colon D \to \mathbb{C}$, D område. $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ är $\mathcal{C}^1$, u, v uppfyller Cauchy-Riemann i D.

$$\Longrightarrow f \text{ är analytisk i } D$$