2006–10–16

Tentan 25 oktober, eftermiddag. Extrainsatt tillfälle tisdag 13–15 (eller 15–17, eller 17–19). Återkommer imorgon.

Transformer

Fourier:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Båda: derivata $\longrightarrow$ multiplikation.

Differentialekvation $\xrightarrow{\text{transform}}$ algebraisk ekvation; löser $\xrightarrow[\text{transform}]{\text{invers}}$ lösningen.

Fouriertransform: Löser den algebraiska ekvationen på ξ-sidan, ...

$$\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} ?$$

Faltning (*convolution*).

DEFINITION:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Variabelsubstitution:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y = (g * f)(x)$$

|||. Faltningen är kommutativ.

(För "trevliga" klasser av funktioner ur Fouriersynpunkt lämnar inte faltningen klassen.)

Formellt:

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,g(x-y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\xi}\,g(x-y)\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}(x-y)} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\hat{g}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{d}y = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$$

Fick vi byta integrationsordning? Fubinis sats. Och hur är det med integralernas konvergens?

Laplacetransform:

$$|f(t)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{at}, \quad \forall t > 0$$

$\Longrightarrow \mathcal{L}f$ är analytisk för $\operatorname{Re} s > a$. Integralen konvergerar och man kan derivera med avseende på s under integraltecknet.

$$(\mathcal{L}f)(s) = F(s) \longrightarrow 0 \quad \text{då } \operatorname{Re} s \to \infty$$

Nödvändigt för att $\exists f\colon \mathcal{L}(f) = F$.

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

DEFINITION. Heavisides funktion:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

|||.

Den funktionen kommer vi använda under integraltecken, och där spelar $t = 0$ inte någon roll.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\theta(t)\, f(t) = \begin{cases} f, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Laplacefaltning:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

(ty $f, g \equiv 0$ för $t < 0$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau)\, f(t)\, \theta(t - \tau)\, g(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

(nu kan jag anta $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

$$\mathcal{L}(f *_t g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

(Formel 10 i tabellen.)

Uppgift 5.1.1

$$u(x) = \begin{cases} x, & |x| < b \\ 0, & |x| > b \end{cases}, \quad b > 0$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, u(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, x\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{partiell integration} \\ \xi \neq 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{1}{\mathrm{i}\xi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, x \right]_{-b}^{b} + \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \cdot 1\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{i}\xi} \left(b\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi} + b\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi} \right) + \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \cdot \frac{1}{-\mathrm{i}\xi} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \right]_{-b}^{b} =$$

$$= \mathrm{i}\, \frac{b}{\xi} \cdot 2 \cos b\xi + \frac{1}{\xi^2} \underbrace{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi} \right)}_{-2\mathrm{i}\sin b\xi}$$

$$\hat{u}(0) = \int_{-b}^{b} x\, \mathrm{d}x = 0$$

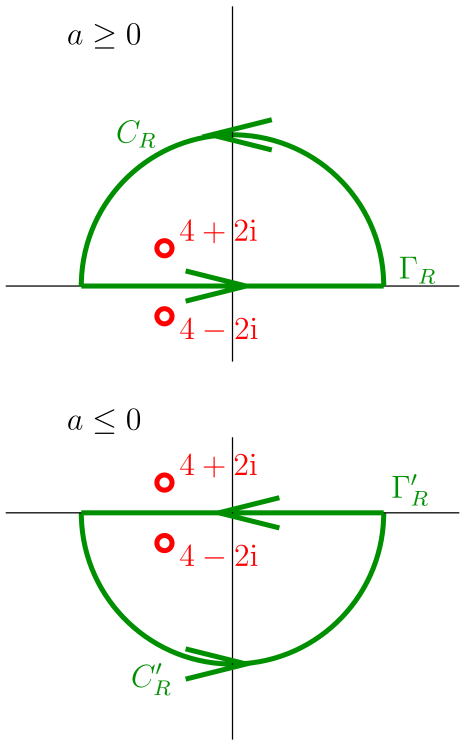
Uppgift 5.1.5

$$u(x)=\frac{1}{x^2+8\,x+20}$$

$$\hat{u}(\xi)=?$$

$$\hat{u}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{x^2+8\,x+20}\,\mathrm{d}x=[a=-\xi]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{a\mathrm{i}x}}{x^2+8\,x+20}\,\mathrm{d}x$$



Figur 1. Val av kontur beror på a.

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\,z}}{z^2+8z+20}$$

$$z^2+8\,z+20=0$$

$$(z+4)^2+4=0$$

$$z_{1,2}=-4\pm 2\mathrm{i}$$

Då $a \geqslant 0$.

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x^2+8x+20}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+8z+20}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{VL} = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{-4+2\mathrm{i}} f = 2\pi\,\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{2z+8}\right|_{z=-4+2\mathrm{i}} =$$

$$= 2\pi\,\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}a-2a}}{-8+4\mathrm{i}+8} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2a}(\cos 4a - \mathrm{i}\sin 4a) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{2\xi}\cos 4\xi + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\xi}\sin 4\xi\right)$$

Detta för $\xi \leqslant 0$.

$$\left|\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+8z+20}\mathrm{d}z\right| = \begin{bmatrix} z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{i}\,R\sin\theta \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{bmatrix} =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}aR\cos\theta}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-aR\sin\theta}}_{\text{belopp } <1}}{R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 8R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 20} R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \pi R \frac{1\cdot 1}{R^2 - 8R - 20} \longrightarrow 0 \text{ då } R \to \infty$$

C_R':

$$z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$\left.\begin{matrix} \sin\theta \leqslant 0 \\ a \leqslant 0 \\ R > 0 \end{matrix}\right\} - aR\sin\theta \leqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{-aR\sin\theta} \leqslant 1$$

...

$$\hat{u}(\xi) = \ldots \quad \text{för } \xi \geqslant 0$$

Exempel.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

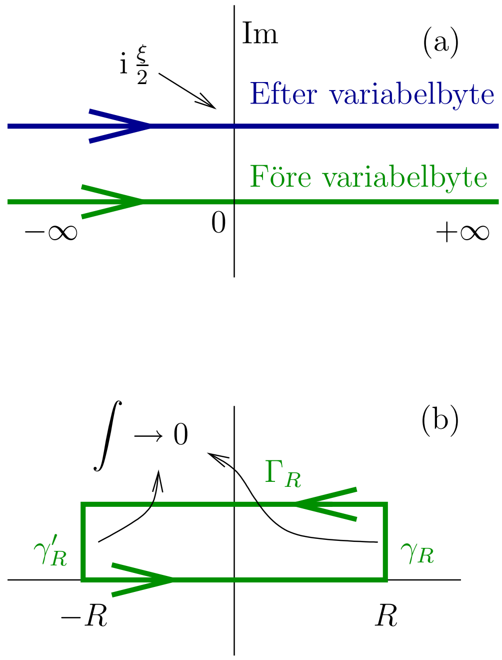
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+\mathrm{i}x\xi)}\,\mathrm{d}x = [\text{kvadratkompletera}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(x+\frac{\mathrm{i}\xi}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(x+\frac{\mathrm{i}\xi}{2}\right)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x + \dfrac{\mathrm{i}\xi}{2} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} \overset{?}{=\!=} \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

Från att ha integrerat över hela realaxeln, måste vi integrera över linjen $\mathrm{i}\frac{\xi}{2}$ (Till gränserna läggs $\mathrm{i}\frac{\xi}{2}$).



Figur 2. (a) Integrationsintervallet före och efter substitutionen. (b) Hur vi hanterar situationen.

$$\int_{\Gamma_R} \mathrm{e}^{-z^2} \mathrm{d}z = 0$$

ty e^{-z^2} är anlaytisk, Γ_R är en sluten kurva.

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x}_{\longrightarrow \sqrt{\pi}} + \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{-z^2} \mathrm{d}z + \int_{R+\mathrm{i}a}^{-R+\mathrm{i}a} \mathrm{e}^{-z^2} \mathrm{d}z + \int_{\gamma'_R} \mathrm{e}^{-z^2} \mathrm{d}z$$

$$\left| \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{z^2} \mathrm{d}z \right| = \left[\gamma_R \colon \begin{matrix} x = R \\ y = t \end{matrix}, 0 \leqslant t \leqslant a \right] = \left| \int_0^a \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)^2} (0 + \mathrm{i}\, \mathrm{d}t) \right| =$$

$$= \left| \int_0^a \mathrm{e}^{-R^2} \cdot \mathrm{e}^{-2Rit} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \right| \leqslant a \cdot \mathrm{e}^{-R^2} \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{a^2} \longrightarrow 0 \quad \text{då } R \to \infty$$

Analogt i den andra änden.

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty+\mathrm{i}a}^{+\infty+\mathrm{i}a} \mathrm{e}^{-z^2} \mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$$

***z*-transform** ”Den kännetecknas bland annat av att jag aldrig kommer ihåg vilka formler som gäller för den.”

Den är en diskret analog till Laplacetransformen.

$$f = f(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (med eller utan noll)}$$

Derivata motsvaras av differens:

$$f' \longleftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{f(n+1) - f(n)}{1}$$

$$\text{differentialekvationer} \longleftrightarrow \text{differensekvationer}$$

Vi vet hur man löser linjära differensekvationer med konstanta koefficienter:

$$y_{n+2} - 4\,y_{n+1} + 2\,y_n = \ldots$$

DEFINITION. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ z-transformen av den är en Laurentserie kring 0:

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

Konvergent utanför en ”stor” cirkelskiva.

$$\text{differensekvation} \overset{z\text{-transform}}{\longrightarrow} \text{algebraisk ekvation; löser} \underset{z\text{-transform}}{\overset{\text{invers}}{\longrightarrow}} ?$$

$$a_1 = \frac{1}{2\,\pi\mathrm{i}} \int_{C_R} X(z)\mathrm{d}z$$

$$a_2 = \frac{1}{2\,\pi\mathrm{i}} \int_{C_R} z\,X(z)\,\mathrm{d}z$$

Residykalkyl.