2006–10–11

Fixpunkter till Möbiusavbildningar

DEFINITION: $f: X \to X$. x_0 kallas **fixpunkt** för f om $f(x_0) = x_0$

||.

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow F(x) + x = x$$

.

$$T(z) = z$$

$$\frac{a\,z + b}{c\,z + d} = z$$

$$c\,z^2 + (d - a)z - b = 0$$

z_0 är fixpunkt $\Rightarrow$ z_0 är rot till ovanstående ekvation. Det finns max två (olika) fixpunkter, om inte $c = 0, d = a, b = 0$. Om $c = 0, d = a, b = 0$ får vi $T(z) \equiv z \Longrightarrow T = \mathrm{id}$.

Partiella differentialekvationer

$$\Delta u = 0 \quad \text{i } D$$

där Δ är Laplaceoperatorn. u kallas harmonisk.

$$\Delta u = f \quad \text{Poissons ekvation i } D \quad \text{(elliptisk PDE)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{i } D \times (0, \infty) \quad \text{(parabolisk PDE)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad \text{(hyperbolisk PDE)}$$

Konforma avbildningar: $u = u(x, y)$. "Platta" problem (tunna plattor, snitt i "långa" problem).

$\Delta u = 0$. Temperaturfördelning, elektrostatisk potential.

RIEMANNS SATS. $D \subset \mathbb{C}$, D enkelt sammanhängande område ⟨fig1⟩

$\Rightarrow D$ är konformt ekvivalent med en cirkelskiva (det finns en konform (analytisk, $f' \neq 0$) avbildning $f: D \to \mathbb{C}$ så att $f(D)$ är en cirkelskiva). ♫

Möbiusavbildningar, e^z tar band till öhp, z^α konforma utan i 0 (snitt), öppnar vinklar i 0.

Övning

1) Titta på funktionen $\sin z$. ⟨fig2⟩.

2) Zhukovskis avbildning: $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. ⟨fig3⟩

⟨fig4⟩. $A(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{a_2} \cdots (z - z_n)^{a_n}$.

$D \xrightarrow{f} f(D)$.

$D \xrightarrow{f} ?, \quad ? \xrightarrow{f} f(D), \quad D \xrightarrow{?} f(D)$.

Transformer

Fouriertransform, Laplacetransform

Diskreta varianter: Diskret Fouriertransform, z-transform.

$$A\,\boldsymbol{x}_\lambda = \lambda\,\boldsymbol{x}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{x}_\lambda \neq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}_\lambda$ egenvektor, λ egenvärde till A.

Bas av egenvektorer $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{e}_n$$

$$A\,\boldsymbol{x} = x_1\lambda_1\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\lambda_n\,\boldsymbol{e}_n$$

Derivata: $D\colon \mathcal{C}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\Omega)$:

$$D(f) = f'$$

$$D(f_1 + f_2) = f_1' + f_2' = D(f_1) + D(f_2)$$

$$D(\alpha f) = \alpha\, f' = \alpha\, D(f)$$

$$D(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}$ är en egenfunktion $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Givet f, kan man framställa f som $\sum_{k\in K} c_k\,\mathrm{e}^{\lambda_k t}$? Generellt, nej. Men ungefär ja för vissa typer av funktioner f.

Idén: hitta en transform så att man istället för att derivera kan multiplicera med skalär.

Fouriertransform

$f \in$ klass av funktioner

DEFINITION: $(\xi \in \mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \quad \left(= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x \right)$$

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = [\text{partiell integration}] =$$

$$= \left[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-\mathrm{i}\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x =$$

Det är rimligt att $f \longrightarrow 0$ då $x \to \pm\infty$.

$$= \mathrm{i}\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\,\hat{f}(x)$$

$$\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\,\hat{f}(\xi)$$

Klasserna av funktioner kommer i läsperiod 3.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2+1} \, dx$$

Residykalkyl.

1. Hur beräknar man $\hat{f}$? Residykalkyl, tabeller.

2. Vad ska man ha $\mathcal{F}$ till?

   $$f'' + f = g \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad -\xi^2 \hat{f} + \hat{f} = \hat{g}$$

   Detta gav en algebraisk ekvation för $\hat{f}$. Lös ut $\hat{f}(\xi)$.

3. Hur får vi f ur $\hat{f}$. Invers fouriertransform: $\mathcal{F}^{-1}$?

   $$\mathcal{F}^{-1}: \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \, e^{ix\xi} \, d\xi$$

   (eller titta i en tabell).

Laplacetransform

$f \in$ lämplig klass av funktioner.

Definition:

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \, e^{-st} \, dt$$

(t är typiskt sett en tidsvariabel) $s \in \mathbb{C}$.

Olika klasser av funktioner för $\mathcal{F}$ och $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}^{-1}$ ges av Bromwichintegralen.

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{\infty} f'(t) \, e^{-st} \, dt = [\text{partiell integration}] =$$

$$= \left[f(t) \, e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \, (-s) \, e^{-st} dt =$$

Låt $f(t) \, e^{-st} \longrightarrow 0$ då $t \to \infty$.

$$= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) \, e^{-st} \, dt = -f(0) + s \, \mathcal{L}(f)(s)$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = s \, \mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

t är tid. Begynnelsevärdesproblem. Differentialekvation, givet $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. Efter Laplacetransform har vi en ekvation som innehåller informationen om begynnelsedata. (u'-villkoret får vi ta med om vi har minst ordning 2 i differentialekvationen)

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s \, \mathcal{L}(f')(s) - f'(0) = s^2 \, \mathcal{L}(f)(s) - f(0) \cdot s - f'(0)$$

Induktivt kan man få godtycklig derivatas Laplacetransform.

Både $\mathcal{F}$ och $\mathcal{L}$ är linjära.

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

(ty så uppför sig integraler).

$$s = \sigma + \mathrm{i}\, p$$

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-\sigma t} \mathrm{e}^{\mathrm{i} p t}\, \mathrm{d}t$$

Konvergerar i $s \in$ halvplan om $|f| \leqslant C\, \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbb{R}$ (funktion av exponentialtyp).

$$|F(s)| \leqslant C \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\sigma - a)t}\, \mathrm{d}t$$

konvergent för $\sigma > a$. ⟨fig5⟩

$$|F(s)| \leqslant C \frac{1}{-(\sigma - a)} \left[\mathrm{e}^{-(\sigma - a)t}\right]_0^\infty = \frac{C}{\sigma - a} \longrightarrow 0 \quad \text{då } \sigma \to \infty$$

Sats: $|f(t)| \leqslant C \mathrm{e}^{at} \forall t \geqslant 0$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(f)(s) \longrightarrow 0 \quad \text{då } \operatorname{Re} s \longrightarrow \infty$$