2006–10–10

Uppgift 3.1.8 Antal nollställen i det övre halvplanet till

$$f(z) = 2z^4 - 2\mathrm{i}z^3 + z^2 + 2\mathrm{i}z - 1$$

⟨fig1⟩

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

$f(z) \to \infty$ då $z \to \infty \Longrightarrow$ för tillräckligt stora R ligger alla nollställen i övre halvplanet innanför Γ_R. $f(\Gamma_R)$? (Hur många varv kring 0?)

Argumentprincipen: $N_f - P_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_R}\arg f(z)$ (antalet varv som $f(\Gamma_R)$ går runt noll i positiv riktning).

$[-R, R]$: $z = x$. Att gå runt origo är att i turordning skära koordinataxlarna.

$$f(x) = 2x^4 - 2\mathrm{i}x^3 + x^2 + 2\mathrm{i}x - 1$$

$$\mathrm{Re}\, f(x) = 2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$\mathrm{Im}\, f(x) = -2x^3 + 2x = 0$$

Imaginärdelen:

$$-2x(x^2 - 1) = -2x(x - 1)(x + 1)$$

$$\mathrm{Im}\, f(x) = 0 \quad \text{för } x \in \{-1, 0, 1\}$$

Realdelen:

$$2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$t = x^2$:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

t_1 är ointressant ($t = x^2$).

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

x	$-R$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	R
$u = \mathrm{Re}\, f$	1:a kvadrant, nära Re	2	0	-1	0	2	4:e kvadrant, nära Re
$v = \mathrm{Im}\, f$	1:a kvadrant, nära Re	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	4:e kvadrant, nära Re

$$\mathrm{Re}\, f(-R) \sim 2R^4 \quad \text{då } R \to \infty$$

$$\mathrm{Im}\, f(-R) \sim 2R^3 \quad \text{då } R \to \infty$$

(Asymptotisk ekvivalens: $F \sim G \Longleftrightarrow \frac{F}{G} \longrightarrow 1$.)

Positiv realdel, positiv imaginärdel $\Rightarrow$ första kvadrant. $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Im}$.

$$\mathrm{Re}\, f(R) \sim 2\, R^4$$

$$\mathrm{Im}\, f(R) \sim -\, 2\, R^3$$

Fjärde kvadranten. $|\mathrm{Re}| \gg |\mathrm{Im}|$. $\langle$fig2$\rangle$.

C_R: $z = R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$f(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = R^4\, \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} \Big(2 + \frac{\cdots}{R}\Big)$$

Den andra faktorn håller sig borta från 0 för stora R.

$$\arg f(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \underbrace{\arg\big(R^4\, \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\big)}_{=4\theta} + \arg\Big(2 + \frac{\cdots}{R}\Big)$$

$$\Delta_{C_R} \arg f(z) = 4\, \Delta_{C_R}\, \theta + \text{hur lite som helst}$$

θ går från 0 till π: Två varv.

Nettoresultatet blir ett varv i positiv riktning. f har ett nollställe i det övre halvplanet.

Uppgift 3.3.4e Hitta en Möbiusavbildning, så att:

$$(\mathrm{i}, 2, -\mathrm{i}) \longmapsto (-\mathrm{i}, 3, \mathrm{i})$$

$$f(z) = \frac{a\, z + b}{c\, z + d}$$

$$\begin{cases} \frac{a\, \mathrm{i} + b}{c\, \mathrm{i} + d} = -\, \mathrm{i} \\ \frac{2\, a + b}{2\, c + d} = 3 \\ \frac{-\, a\mathrm{i} + b}{-\, c\, \mathrm{i} + d} = \mathrm{i} \end{cases}$$

Detta blir ett linjärt ekvationssystem.

Uppgift 7a Möbiusavbildning T:

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 1$$

$$T(\mathrm{i}) = \infty$$

$$(0, 1, \mathrm{i}) \longmapsto (0, 1, \infty)$$

$$T(z) = \frac{a\, z + b}{z - \mathrm{i}}$$

Uppgift 7c

$$T\colon \quad \mathrm{Re} \mapsto \mathrm{Re}, \quad \mathrm{Im} \mapsto \left\{ \left| w - \frac{5}{4} \right| = \frac{3}{4} \right\}$$

⟨fig3⟩. OBS! Konformitet.

$$\infty \mapsto 2, \quad 0 \mapsto \frac{1}{2}$$

$$T(z) = \frac{2z-1}{z-2}$$

Imaginäraxeln i z-planet: "cirkel" genom 0 och ∞, vinkelrät med realaxeln, avbildas på en "cirkel" genom $\frac{1}{2}$ och 2 $\perp$ realaxeln: det finns bara en sådan.

Uppgift 15

$$T(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

$$T(T(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

1.

$$T(T(z)) = \frac{\frac{1-z}{1+z}}{\frac{1-z}{1+z}} = \ldots$$

2. Sammansättningar av Möbiusavbildningar är Möbiusavbildningar.

$T(T(z))$ är en Möbiusavbildning.

$$T(T(z)) \equiv z \Longleftrightarrow T \circ T = \mathrm{id}$$

En Möbiusavbildning med fler än två fixpunkter måste vara identitetsavbildningen.

$T \circ T$ har tre olika fixpunkter:

$$\infty \mapsto -1 \mapsto \infty$$

$$0 \mapsto 1 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 0 \mapsto 1$$

$\Rightarrow T \circ T = \mathrm{id}$.

$T \circ T = \mathrm{id} \Longleftrightarrow T = T^{-1}$. Alla sådana Möbiusavbildningar?

Uppgift 3.5.6. ⟨fig4⟩.

Uppgift 3.5.9 I:a kvadranten avbildas av f på bandet $|\mathrm{Im}\, w| < 1$.

$$z = f^{-1}(w) = \exp\left(\frac{\pi}{4}(w + \mathrm{i})\right)$$

f fås med lämplig log.

Uppgift 4.3.2 ⟨fig5⟩

Temperaturfördelningen?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{(värmeledninsekvationen)}$$

stabiliseras $\rightarrow$ stationärt läge: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. u blir en harmonisk funktion.

Sök u med randvillkoren i $\langle$fig5$\rangle$.

Om f är analytisk och u är harmonisk så är $u \circ f$ också harmonisk. $u = \operatorname{Re} F$, $u \circ f = \operatorname{Re}(F \circ f)$: harmonisk.

Mål: $\langle$fig6$\rangle$. $\operatorname{Arg} w$ är harmonisk $(\operatorname{Arg} w = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} w), \operatorname{Log} w$ analytisk)

$$\tilde{u} = C_1 \operatorname{Arg} w + C_2$$

$$T_1' = C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$T_2' = C_1 \cdot \pi + C_2$$

$$C_2 = T_1'$$

$$C_1 = \frac{T_2' - T_1'}{\pi}$$

$$\tilde{u} = \frac{T_2' - T_1'}{\pi} \operatorname{Arg} w + T_1'$$

f^{-1}: funktion av x, y.