2006–10–09

Uppgift 3.1.2 Bestäm antalet nollställen i första kvadranten till

$$f(z) = z^4 - 3\,z^2 + 3$$

1. Antalet nollställen i det högra halvplanet.

2. $z^4 - 3z^2 + 3 = \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 > 0 \forall z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Det finns inga nollställen på realaxeln.

Polynom med reella koefficienter $\Rightarrow$ icke-reela nollställen förekommer i komplex-konjugerade par. Hälften av nollställena i högra halvplanet ligger i första kvadranten.

Detta gav oss två kurvbitar att titta på, jämfört med tre om vi hade kört på bara första kvadranten. ⟨fig1⟩.

$$\Gamma_R = \{\mathrm{i}y\colon y \in [\underset{\longleftarrow}{-R, R}]\} \cup C_R$$

För tillräckligt stora R kommer alla nollställen i högra halvplanet att ligga innanför Γ_R, ty

$$|f(z)| \geqslant |z|^4 - 3\,|z|^2 - 3 \longrightarrow \infty \quad \text{då } |z| = R \to \infty$$

Argumentprincipen: $N_f - P_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_R} \arg f(z)$ (antalet varv i positiv riktning som $f(\Gamma_R)$ gör runt 0.

Polynom $P_f = 0$. $f(\Gamma_R)$? ⟨fig2⟩.

$R \xrightarrow{y} -R$: $z = \mathrm{i}y$:

$$f(\mathrm{i}y) = y^4 + 3\,y^2 + 3$$

$$\operatorname{Im} f(\mathrm{i}y) = 0$$

$$\operatorname{Re} f(\mathrm{i}y) = f(\mathrm{i}y) > 0$$

⟨fig3⟩. På C_R:

$$z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = R^4\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - 3\,R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 3 =$$

$$= R^4\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} \underbrace{\left(1 - 3 \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \frac{3}{R^4}\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right)}_{\text{mycket nära 1 för stora } R\text{: långt från 0}}$$

$$\arg f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \arg f(R^4\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}) + \underbrace{\arg(1 - \Omega(R))}_{\text{bidrag 0}}$$

Det kommer ge två varv ($4\,\mathrm{i}\theta$ där θ går ett halvt varv) i positiv riktning.

Totalt gav detta två varv moturs: två nollställen i det högra halvplanet $\Longrightarrow$ ett nollställe i första kvadranten.

Konforma avbildningar

DEFINITION: En avbildning (från planet till planet) kallas konform om den bevarar vinklar till storlek och riktning.

EXEMPEL:

1. Translation (kongruens)

$$f(z) = z + A, \quad A \in \mathbb{C}$$

2. Rotation (kongruens)

$$\text{runt } 0: \quad f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} z$$

3. Icke konform avbildning, som ändå är kongruent: spegling.

$$\text{i realaxeln:} \quad f(z) = \bar{z}$$

   Bevarar vinklars storlek, men byter riktningen $\Rightarrow$ en isogonal avbildning.

4. Icke-konform (men isogonal) avbildning: inversion.

SATS: f analytisk i z_0, $f'(z_0) \neq 0 \implies f$ är konform i z_0 (f bevarar vinklar med spets i z_0 till storlek och riktning).

Bevis. ⟨fig4⟩. Vinkel från γ_1 till γ_2 i z_0: vinkeln mellan tangenterna till γ_1 och γ_2 i punkten.

$$\underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} = |f'(z_0)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f(z_0)}$$

Låt $\varphi = \arg f(z_0)$:

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$$

$$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$z_0 \in \gamma \iff \exists t_0 \in [a, b]\colon \gamma(t_0) = z_0$$

Tangentvektor $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq \mathbf{0}$:

$$\underbrace{z'_\gamma(t_0)}_{\gamma'(t_0)} = x'(t_0) + \mathrm{i}\, y'(t_0)$$

Vinkeln θ: vinkeln mellan $\gamma'_1(t_0) \ \to \ \gamma'_2(t_0)$, går att ordna.

Om vi tar f på det?

$$\Gamma_k(t) = f(\gamma_k(t))$$

Tangentvektorerna i w-planet:

$$\Gamma'_k(t) = [\text{kedjeregeln}] = f'(\gamma_k(t)) \cdot \gamma'_k(t)$$

$$\begin{cases} t = t_0 \\ \gamma_k(t_0) = z_0 \\ \Gamma_k(t_0) = f(z_0) = w_0 \end{cases}$$

$$\Gamma'_k(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'_k(t_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \cdot \gamma'_k(t_0)$$

Vinkeln i z-planet:

$$\theta = \arg \gamma_2'(t_0) - \arg \gamma_1'(t_0)$$

Vinkeln i w-planet (indexordningen är samma $\Rightarrow$ vinkelns riktning bevaras):

$$\tilde{\theta} = \arg \Gamma_2'(t_0) - \arg \Gamma_1'(t_0) =$$

$$= \left(\varphi_0 + \arg\gamma_2'(t_0)\right) - \left(\varphi_0 + \arg\gamma_1'(t_0)\right) = \theta$$

f analtyisk, $f'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow$ lokalt fungerar f som rotation med vinkel arg $f'(z_0)$ och omskalning med faktor $|f'(z_0)|$. □

Om $f' \neq 0$ i D så är f konform i hela D.

Ofta om man talar globalt, så kräver man även att f ska vara en bijektion.

Strömlinjer ⟨fig5⟩

$$w = (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \underbrace{\mathrm{Im}(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}_{\text{funktion av } x \text{ och } y} = \text{konstant}$$

⟨fig6⟩.

$$w = z_2^2 = -\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

$f(z) = z^2$ är konform överallt utom i 0. $f' = 2z|_{z=0} = 0$. Vinklar med spets i noll dubblas.

Andra problem där konforma avbildningar är intressanta: $\Delta u = 0$ så att...