2006–10–05

ROUCHÉS SATS: γ är en enkel, sluten kurva; f och g är analytiska på och innanför γ; g domineras av f, i meningen att $|g(z)| < |f(z)|\, \forall z \in \gamma$ (*på* kurvan alltså). Då gäller:

f och $f + g$ har lika många nollställen innanför γ (räknade med multiplicitet). ♫

Bevis. f och $f + g$ kan ej ha nollställen på γ, ty ($z_0 \in \gamma$)

$$f(z_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant |g(z_0)| < |(f(z_0)| < 0 \quad > ! <$$

Motsägelsetecken: $> ! <$ eller $\langle$fig1$\rangle$.

$$(f + g)(z_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(z_0)| = |-g(z_0)| > |g(z_0)| \quad > ! <$$

$f + t\,g$ kan ej ha nollställen på γ för $t \in [0, 1]$:

$$(f + t\,g)(z_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|f(z_0)|}_{> |g(z_0)}= |-t\,g(z_0)| \leqslant t\,|g(z_0)| \quad > ! <$$

Logaritmiska indikatorn för $f + t\,g$ på γ:

$$F(t) = \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{(f' + t\,g')(z)}{(f + t\,g)(z)}\,\mathrm{d}z$$

F är en kontinuerlig funktion av t (lätt att bevisa, ty γ är en kompakt mängd).

$$F(t) = N_{f+tg} - \underbrace{P_{f+tg}}_{=0} \in \mathbb{Z}$$

Kontinuerlig funktion med heltalsvärden $\Longrightarrow F$ är konstant.

$$F(0) = N_f = F(1) = N_{f+g}$$

(method of continuity) □

Om f är en kontinuerlig funktion, K är en kompakt mängd, så följer att $f(K)$ också är kompakt.

Tag $f = \sin$ och mängden $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ är öppen, men $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ är sluten.

SATS: D är ett område, f är analytisk i D, $f \not\equiv$ konstant.

$$\Longrightarrow f(D) \quad \text{är också ett område.}$$

f kontinuerlig, U sammanhängande $\Longrightarrow f(U)$ är sammanhängande. ♫

Bevis.

1. Är det sant att $f(D)$ är sammanhängande?

$$w_1, w_2 \in f(D)$$

$$? \exists \Gamma : [a, b] \longrightarrow f(D) \colon \Gamma(a) = w_1, \Gamma(b) = \omega_2$$

$$\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in D \colon f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2; \quad D \text{ sammanhängande}$$

$$\Rightarrow \exists \gamma \colon [a, b] \longrightarrow D\colon \quad \gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2$$

Tag $\Gamma = f \circ \gamma$. Detta är en kontinuerlig funktion, $\Gamma(a) = f(\gamma(a)) = f(z_1) = w_1$ (analogt för b).

2. Är det sant att $f(D)$ är öppen? ⟨fig2⟩

$$w_0 \in f(D), \qquad ?\exists\delta > 0\colon \{|w - w_0| < \delta\} \subset f(D)$$

$$\exists z_0 \in D\colon f(z_0) = w_0$$

f är analytisk i D (i z_0).

$$?\exists\delta > 0\colon \quad \forall w\colon |w - w_0| < \delta \quad \exists z \in D\colon f(z) = w$$

Den sista ekvationen ska ha minst en lösning, när man löser efter z.

$$f(z_0) - w_0 = 0$$

$$f(z) - w_0 = 0 \ \text{ i } z = z_0$$

z_0 är ett nollställe till $f(z) - w_0 \Longrightarrow \exists$ en punkterad omgivning till z_0 i vilken $f(z) - w_0 \neq 0$.

$$f(z) - w_0 \neq 0 \text{ på } \gamma_\varepsilon$$

$$|f(z) - w_0| \neq 0 \ \text{ på } \gamma_\varepsilon$$

reellvärd, kompakt mängd $\Longrightarrow |f(z) - w_0|$ antar minsta värde på γ_ε.

$$\Longrightarrow \min_{\gamma_\varepsilon} |f(z) - w_0| = \delta > 0$$

Tag w_1: $|w_1 - w_0| < \delta$, gäller då $w_1 \in f(D)$, dvs finns det någon lösning till $f(z) - w_1 = 0$ i D, dvs finns det nollställen till $f(z) - w_1$ i D?

Vi vet: $f(z) - w_0$ har nollställe innanför γ_ε.

Vi vill ha slutsatsen att $f(z) - w_1$ har nollställe innanför γ_ε.

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + w_0 - w_1$$

På γ_ε: $|f(z) - w_0| \geqslant \delta > |w_1 - w_1|$. Enligt Rouchés sats har $f(z) - w_0$ och $(f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$ $= f(z) - w_1$ lika många nollställen innanför γ_ε, alltså minst ett (räknar med multiplicitet).

$\exists z_1 \in D$ så att $f(z_1) - w_1 = 0$

$\Rightarrow w_1 \in f(D)$

$\Rightarrow \{|w - w_0| < \delta\} \subset f(D)$

$\Rightarrow f(D)$ öppen. □

Maximumprincipen: $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv$ konstant, f är analytisk

$$\Longrightarrow |f| \text{ kan inte ha lokalt maximum i } D$$

Bevis. ⟨fig3⟩ Antag motstsen, dvs $|f(z)|$ har ett lokalt maximum i $z_0 \in D$. $|f(z)|$ har globalt maximum i ett mindre område D_1, i z_0. Vi vet att $w_0 = f(z_0)$ är en inre punkt för $f(D_1)$. ⟨fig4⟩. $w_0 \in f(D_1)$ tilslammans med en omgivning. $|w_0| = \max_{f(D_1)} |w|$. **Motsägelse!** Ty omginvingen måste innehålla punkter med större belopp (längre bort från origo).

$\Longrightarrow |f|$ har ej lokalt maximum i D. $\square$

(Maximumprincipen går också att få direkt från Cauchys integralformel.)

Uppgift 2.6.14

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x$$

(Det går att på precis samma sätt räkna

$$\left.\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,x^\alpha\,\mathrm{d}x\right)$$

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{\alpha \log z}$$

Val av gren: $z_*^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log_* z}$. $\langle$fig5$\rangle$.

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = [\varepsilon, R] \cup C_R \cup \underset{\longleftarrow}{[\varepsilon, R]} \cup (-\gamma_\varepsilon)$$

$\log_* z$: snitt $[0, \infty)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\,\pi$. Gränserna tillåter vi genom att tänka på Riemannytan, och betrakta 0 som ovansidan av snittet och $2\,\pi$ som undersidan av snittet.

$$\int_{\varepsilon,\,\text{ovansidan}}^R \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log_* x}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln|x|+\mathrm{i}\cdot 0)}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{R,\text{undersidan}}^\varepsilon \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln|x|+\mathrm{i}\cdot 2\pi)}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x = \int_R^\varepsilon \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln|x|}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(Om det hade stått x^α: $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\alpha}}\cdot I$).

$$\left|\int_{C_R}\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln R+\mathrm{i}\theta)}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+2\,R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+5}\cdot R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}\cdot 1}{R^2-2\,R-5}\,R\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{R\sqrt{R}}{R^2-2\,R-5} \longrightarrow 0 \quad \text{då } R\to\infty$$

$$\left|\int_{-\gamma_\varepsilon}\right| = \left|\int_{2\pi}^0 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln\varepsilon+\mathrm{i}\theta)}}{\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+2\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+5}\cdot \varepsilon\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}\cdot 1\cdot\varepsilon\cdot 1}{5-2\,\varepsilon-\varepsilon^2}\cdot 2\pi \longrightarrow 0 \quad \text{då } \varepsilon\to 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z \longrightarrow 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x \quad \text{då } \varepsilon\to 0 \text{ och } R\to\infty$$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathbb{C}} \operatorname{Res} f$$

Vi behöver alltså lösa $z^2+2\,z+5=0$:

$$(z+1)^2+4=0$$

$$z_{1,2} = -1\pm 2\,\mathrm{i} = \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\mathrm{i}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Bestäma vinkeln blir krångligt.