2006–10–04

ROUCHÉS SATS: γ enkel sluten kurva, f, g är analytiska på och innanför kurvan,

$|f(z) \pm g(z)| < |f(z)| \, \forall z \in \gamma$

$$\Longrightarrow f \text{ och } g \text{ har lika många nollställen innanför } \gamma \text{ räknade med multiplicitet.}$$

EKVIVALENT FORMULERING: $|g(z)| < |f(z)| \, \forall z \in \gamma$.

$$\Longrightarrow f \text{ och } f \pm g \text{ har lika många nollställen räknade med multiplicitet.}$$

♫

Uppgift 3.1.15

$$F(z) = 4\,z^3 - 12\,z^2 + 2\,z + 10$$

Bestäm antal nollställen i $\frac{1}{2} < |z-1| < 2$. ⟨fig1⟩

Antalet nollställen i D = antalet nollställen i $\{|z-1| < 2\}$ minus antalet nollställen i $\{|z-1| < \frac{1}{2}\}$ minus antalet nollställen på $\{|z-1| = \frac{1}{2}\}$.

Vi vill uttrycka $F(z)$ i potenser av $z-1$ (Taylorutveckla F kring $z-1$).

Variabelbyte: $z - 1 = t \Longleftrightarrow z = t + 1$.

$$F(t+1) = 4\,(t+1)^3 - 12\,(t+1)^2 + 2\,(t+1) + 10 =$$

$$= 4\,t^3 + 12\,t^2 + 12\,t + 4 - 12t^2 - 24t - 12 + 2\,t + 2 + 10 =$$

$$= 4\,t^3 - 10\,t + 4$$

$$\Longrightarrow F(z) = 4\,(z-1)^3 - 10\,(z-1) + 4$$

$\gamma_1 = \{|z-1| = 2\}$.

$$f_1(z) = 4\,(z-1)^3$$

$$g_1(z) = -10\,(z-1) + 4$$

På γ_1:

$$|g_1(z)| = |-10\,(z-1) + 4| \leqslant |10(z-1)| + |4| = 24 < |f_1(z)| = 4 \cdot 2^3 = 32$$

$\Rightarrow f_1$ och $f_1 + g_1 = F$ Har lika många nollställen innanför γ_1, dvs tre stycken.

$\gamma_2 = \{|z-1| = \frac{1}{2}\}$. $f_2(z) = -10\,(z-1)$, $g_2(z) = 4\,(z-1)^3 + 4$.

$$|g_2(z)| = |4\,(z-1)^3 + 4| \leqslant 4 \cdot |z-1|^3 + |4| = 4 \cdot \frac{1}{8} + 4 = \frac{9}{2} <$$

$$< |f_2(z)| = |-10(z-1)| = 5$$

$\Longrightarrow f_2$ och $f_2 + g_2 = F$ har lika många nollställen, dvs ett (reellt).

På $\gamma_2 = \{|z-1| = \frac{1}{2}\}$: $|F(z)| \geqslant |-10(z-1)| - |4\,(z-1)^3 + 4| \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow F \neq 0$ på γ_2.

Antal nollställen i D: 2 st.

Uppgift 17c

$$z + a = \mathrm{e}^z, \quad a > 0 \quad \text{i } \operatorname{Re} z < 0$$

⟨fig2⟩ $\gamma = \{\mathrm{i}y\colon y \in [-R, R]\} \cup C_R$.

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \begin{cases} 1 & \text{på } I_R = \{\mathrm{i}\,y\colon y \in [-R, R]\} \\ \mathrm{e}^{R\cos\theta} & \text{på } C_R \end{cases} \quad \Rightarrow |\mathrm{e}^z| \leqslant 1$$

$$\text{På } \{\mathrm{i}\,y\colon y \in [-R, R]\}\colon \qquad |z + a| = |\mathrm{i}y + a| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\text{På } C_R\colon \quad |z + a| = |R\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + a| = \sqrt{(a + R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{a^2 + R^2 + 2\,a\,R\cos\theta} \sim R$$

Om $a > 1$:

på I_R: $|z + a| = \sqrt{a^2 + y^2} \geqslant a > 1 = |\mathrm{e}^z|$.

på C_R: $|z + a| = \ldots \sim R > 1 \geqslant |\mathrm{e}^z|$.

$\Longrightarrow z + a$ och $z + a - \mathrm{e}^z$ har lika många nollställen innanför γ_R, dvs ett nollställe.

För stora R: alla nollställen i vhp innanför γ_r.

Om $a < 1$ fungerar inte vår metod. I boken står det $a > 1$.

Sats:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad g, h \text{ är båda analytiska}$$

$$h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0 \quad (z_0 \text{ är ett enkelt nollställe till } h)$$

$$g(z_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Bevis. $(a_0 \neq 0 \neq b_1)$

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots}{b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots}{b_1 + b_2(z - z_0) + \cdots}$$

z_0 är en enkelpol till f.

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots}{b_1 + b_2(z - z_0) + \cdots} = \frac{a_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad \square$$

Exempel.

$$f(z)=\frac{z^4+1}{z^8+1}$$

$$z^8+1=0$$

(Rotutdragining — tänk tandläkare)

$$z^8=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/8},\quad k\in\{0,1,\ldots,7\}$$

Rötterna är *olika*.

$$z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$$

$$g(z_0)=\mathrm{e}^{4\cdot\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}+1=\mathrm{i}+1\neq 0$$

z_0 är ett enkelt nollställe till h.

$$\Longrightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f=\frac{z_0^4+1}{8\,z_0^7}=\frac{\mathrm{i}+1}{8\,z_0^7}=-\frac{1}{8}\,(\mathrm{i}+1)\,z_0=-\frac{1}{8}(\mathrm{i}+1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$$

$$\left[z_0^8=-1\Longrightarrow z_0^7=-\frac{1}{z_0}\Longrightarrow\frac{1}{z_0^7}=-z_0\right]$$

$$0<\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$0<\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

Uppgift 2.6.5′

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$f(z)=\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}$$

$\deg Q=\deg P+1$. Singulär punkt: i.

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}} f=\left.\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\,z}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\exp(\mathrm{i}\theta)}}{R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1}\,R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|=$$

$$=\left|\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{i}\,R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\cos\theta}\cdot\mathrm{e}^{-R\sin\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1}\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{R^2}{R^2-1}\left|\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right|$$

⟨fig3⟩. I intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ har vi $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = [\text{symmetri}] = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta = 2\cdot\frac{1}{-R\frac{2}{\pi}}\left[\mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{-R\frac{2}{\pi}}\left(\mathrm{e}^{-R}-1\right) = \frac{\pi}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right)$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \cdots \leqslant \frac{R^2}{R^2-1}\cdot\frac{\pi}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{då } R\to\infty$$

Dyker upp vid många tillfällen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Använd

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$$

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0 \quad \langle\text{fig4}\rangle$$