2006–10–03

⟨fig1⟩ Analytisk fortsättning.

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

f är analytisk i $\{|z| < 1\}$.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Vänsterledet är analytiskt i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Den logaritmiska indikatorn och argumentprincipen

Stabilitet: ⟨fig2⟩.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

Lösningarna till den karakteristiska ekvationen är normalt sett komplexa: $\alpha + \beta\mathrm{i}$, multiplicitet m. En lösning till den karakteristiska ekvationen ger upphov till

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\beta x), \quad x\, \mathrm{e}^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\beta x), \quad \ldots, \quad x^{m-1} \ldots$$

När kommer lösningen vara begränsad, då $x \to +\infty$?

$\alpha < 0$, $\alpha = 0$ (om det inte föreligger resonans, dvs om multipliciteten är ett).

Karakteristiska polynomet:

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

Var ligger nollställena? Ligger de i det högra eller vänstra halvplanet?

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))'$$

... om $f(z) \neq 0$, f analytisk på γ ⟨fig3⟩. ⟨fig4⟩

$$\log f(z) = \ln|f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$$

$|f|$ är kontinuerlig, $\neq 0$. Jag får samma värde i början som i slutet.

Ändringen i arg $f(z)$ blir nettoantalet varv, gånger $2\pi\mathrm{i}$. Med nettoantalet varv förstås antalet i positiv riktning minus antalet i negativ riktning.

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \int_{z_{0,\text{början}}}^{z_{0,\text{slut}}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = [\log_* f(z)]_{z_{0,\text{början}}}^{z_{0,\text{slut}}} =$$

där $\log_*$ betecknar en succession av grenar enligt ⟨fig3⟩,

$$= (\ln|f(z_{0,\text{slut}})| + \mathrm{i} \arg f(z_{0,\text{slut}}))(\ln|f(z_{0,\text{början}})| + \mathrm{i} \arg(f(z_{0,\text{början}})) =$$

$$= 2\,\pi\,\mathrm{i} \cdot \text{nettoantalet varv som } f(\gamma) \text{ går runt } 0.$$

Låt oss säga att f har nollställe med multiplicitet m i z_0 (OBS: ej samma z_0 som ovan.)

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = ?$$

$$f(z) = \underbrace{a_m}_{\neq 0} (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

$$f'(z) = \underbrace{m\, a_m}_{\neq 0} (z - z_0)^{m-1} + (m+1)\, a_{m+1} (z - z_0)^m + \cdots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m\, a_m (z - z_0)^{m-1} + (m+1)\, a_{m+1} (z - z_0)^m + \cdots}{a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots} =$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{m\, a_m + \mathfrak{O}(z - z_0)}{a_m + \mathfrak{O}(z - z_0)}$$

z_0 är en enkelpol till $\frac{f'}{f}$

$$\Longrightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = b_{-1} (z - z_0)^{-1} + b_0 + \cdots \quad \text{där residyn är } b_{-1}$$

$$\Longrightarrow b_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m\, a_m + 0}{a_m + 0} = m$$

Residyn blev alltså multipliciteten.

Om f har en pol av ordning p i z_0.

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = ?$$

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots$$

$$f'(z) = \frac{-\, p\, a_{-p}}{(z - z_0)^{p+1}} + \frac{-\,(p-1)\, a_{-p+1}}{(z - z_0)^p} + \cdots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{-\, p\, a_{-p}}{(z - z_0)^{p+1}} + \frac{-\,(p-1)\, a_{-p+1}}{(z - z_0)^p} + \cdots}{\frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots} \cdot \frac{(z - z_0)^p}{(z - z_0)^p} =$$

$$= \frac{\frac{-\, p\, a_{-p}}{z - z_0} - (p-1)\, a_{-p+1} + \cdots}{a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \cdots} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{-\, p\, a_{-p} - \mathfrak{O}(z - z_0) + \cdots}{a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \cdots}$$

Enkelpol.

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = c_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\, p\, a_{-p} + 0}{a_{-p} + 0} = -\, p$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{\substack{f\text{:s nollställens} \\ \text{multiplicietet}}} m_k - \sum_{\substack{f\text{:s polers} \\ \text{ordning}}} p_l = N - P =$$

där N är antalet nollställen till f innanför γ räknade med multiplicitet och P är antalet poler till f räknade med ordning,

$$= \text{nettoantalet varv som } f(\gamma) \text{ gör runt } 0. \text{ (Argumentprincipen)}$$

SATS: (Argumentprincipen). γ enkel sluten kurva, ett varv moturs. f är analytisk på γ. f är analytisk innanför γ utom i ändligt många poler. (f har ändligt många nollställen innanför γ, inga nollställen på γ — följer av att f är analytisk, $\not\equiv 0$.)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \underbrace{N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z)}_{\text{argumentprincipen}}$$

där $\Delta_\gamma \arg f(z)$ är nettoändringen i $\arg f(z)$ när $z \in \gamma$, N är antalet nollställen till f innanför γ räknade med multiplicitet och P är antalet poler till f räknade med ordning. □

SATS: (Rouchés sats). γ är en enkel sluten kurva, f, g är analytiska på och innanför γ,

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma$$

$$\Longrightarrow f \text{ och } g \text{ har lika många nollställen (räknade med multiplicitet) innanför } \gamma$$

Bevis. Varken f eller g kan ha nollställen på γ, ty

$$f(z_0) = 0, z_0 \in \gamma \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(z_0)|}_{=0} > |\ldots| \geqslant 0 \quad >!< \text{ motsägelse}$$

$$g(z_0) = 0, z_0 \in \gamma \quad \Rightarrow \quad |f(z_0) + \underbrace{g(z_0)}_{=0}| = |f(z_0)| < |f(z_0)| \quad >!<$$

På γ: $|f(z) + g(z)| < |f(z)|$, $|f(z)| > 0$ på γ

$$\Longrightarrow \left|1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \quad \forall z \in \gamma$$

Vänster led är avståndet mellan g/f och -1. ⟨fig5⟩.

$F = g/f$, $F(\gamma)$ håller sig borta från 0. $F(\gamma)$ går inte runt 0.

$$\Rightarrow \Delta_\gamma \arg \frac{g}{f} = 0 = 0$$

$$N_F = P_F$$

$N_F = N_g$, $P_f = N_f$

$$\Longrightarrow N_f = N_g$$

f och g har lika många nollställen. □

Uppgift 17b)

$$z^3 - z^2 - z - 6 = 0 \quad \text{i } \{|z| < 1\}$$

Vi är intresserade av antalet lösningar till den här ekvationen.

Låt γ vara kurvan runt enhetscirkeln.

Uppgift 16 **Rouchés sats** (ekvivalent version). γ är en enkel sluten kurva. f, g är analytiska på och innanför γ.

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ på } \gamma$$

$$\Longrightarrow f \text{ och } f \pm g \text{ har lika många nollställen innanför } g\text{, räknade med multiplicitet.}$$

f dominant $\Rightarrow g$ kan uppfattas som störning.

Bevis. $f, \; f + g = G$

$$\text{Att visa: } |f + G| < |f| \text{ eller } |f - G| < |f|$$

$\pm G$ har lika många nollställen.

$$|f - G| = |f - f - g| = |g| < |f| \text{ på } \gamma \qquad \square$$

Åter till uppgift 17b.

$$z^3 - z^2 - z - 6 = 0$$

Sätt $f(z) = -6$, $g(z) = z^3 - z^2 - z$.

På enhetscirkeln:

$$|g(z)| = |z^3 - z^2 - z| \leqslant |z|^3 + |z|^2 + |z| = 3 < 6 = |f(z)|$$

f och $f + g$ har lika många nollställen i $\{|z| < 1\}$.