Fö 2006-09-26

Isolerade singulariteter

z_0 hävbara: inga negativa potenser av $z-z_0$ i f:s Laurentutveckling

$\iff \exists \lim_{z\to z_0} f(z)$ $(\neq \infty)$ $\iff$ f begränsad i en punkterad omgivning till z_0

pol: ändligt många negativa potenser av $(z-z_0)$ i f:s L.utv.

$\iff \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

Väs.sing.: Oändligt många neg. potenser av $(z-z_0)$ i f:s L.utv.

$\iff \nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$, vare sig ändligt eller oändligt.

Sats f analytisk i $\{0<|z-z_0|<r\}$

Laurentutvecklingen för f kring z_0 i D innehåller ändligt många negativa potenser av $(z-z_0)$

$\iff \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ $\quad (z_0$ pol$)$

Bevis $\boxed{\Rightarrow}$

$$f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{a_{-m}}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$m \geq 1$ $\quad$ i $\{0<|z-z_0|<r\}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{\left(\underset{\neq 0}{a_{-m}} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots\right)}_{=g(z)}$$

$g(z)$ analytisk (potensserie) i $\{|z-z_0|<r\}$

$g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} a_{-m} \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \xrightarrow[z\to z_0]{} \text{"}\frac{\overset{\neq 0}{a_{-m}}}{0}\text{"} = \infty$$

(19)

$\boxed{\Leftarrow}$ $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow f(z) \neq 0$ i $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ analytisk i $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$

$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{"1"}{\infty} = 0 \Rightarrow z_0$ hävbar singularitet för $\frac{1}{f}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases} \quad (\text{i omg.}) \Rightarrow g \text{ analytisk}$$

$\Rightarrow$ Taylorutveckla: $g(z) = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots$

$\boxed{g(z_0) = 0}$ $\quad m \geq 1$ multipliciteten i $\{|z - z_0| < \delta\}$

$\Rightarrow$ i $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$ $f(z) = \frac{1}{b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots} =$

$$= \boxed{\frac{1}{(z - z_0)^m}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underset{\neq 0}{b_m} + b_{m+1}(z - z_0) + \ldots}}_{h(z)}$$

analytisk i $\{|z - z_0| < \delta\}$ (nämnaren $\neq 0$)

$\Rightarrow h(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$ i $\{|z - z_0| < \delta\}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots$ i $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$

$\Rightarrow$ ändligt många potenser i L.utv. (pol av ordning $\underline{m}$)

Residykalkyl

def f analytisk i $\{0<|z-z_0|<r\}$

$$f(z)=\dots+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots$$

Laurentutveckling i $\{0<|z-z_0|<r\}$

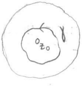
a_{-1} kallas f:s residy i z_0

$\mathrm{Res}(f;z_0)$

$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f$

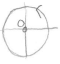
$$\int_{|z-z_0|=r_1}\frac{dz}{(z-z_0)^k}=\begin{cases}2\pi i & k=1\\ 0 & k\neq 1\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$



$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz=2\pi i a_{-1}=2\pi i\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f$$

Ex $\displaystyle\int_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\underset{0}{\mathrm{Res}}\, e^{\frac{1}{z}}=2\pi i$

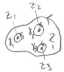


$$e^{\frac{1}{z}}=1+\boxed{\frac{1}{z}}+\frac{1}{2!z^2}+\dots$$

$a_{-1}=\underset{0}{\mathrm{Res}}=1$

Finns det icke-isolerade singulariteter? Ja, t.ex. 0 för $\mathrm{Log}\, z$ (förgreningspunkt)

$\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$



Lokalisering

$$\int_\gamma=\underbrace{\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}}_{\text{Var och en av kurvorna omringar endast en singularitet.}}=2\pi i\left(\underset{z_1}{\mathrm{Res}}\, f+\underset{z_2}{\mathrm{Res}}\, f+\underset{z_3}{\mathrm{Res}}\, f\right)$$

γ enkel sluten kurva
inga singulariteter på γ. sing: $z_1,\dots,z_k$
innanför γ $\Rightarrow \displaystyle\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\underset{z_j}{\mathrm{Res}}\, f$

(16)

Hur beräknas residyer?

z_0 singularitet f analytisk i $\{0<|z-z_0|<r\}$

Bestäm typen!

(1) hävbar: $a_{-1}=0$

(2) pol av ordning $\underline{m}$:

$$f(z)=\frac{\overset{\neq 0}{a_{-m}}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\dots \quad \Big| \cdot (z-z_0)^m$$

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots+\boxed{a_{-1}}(z-z_0)^{m-1}+\dots$$

Derivera $(m-1)$ ggr!

$$\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}=\underbrace{(m-1)!\,a_{-1}}+\underbrace{\blacksquare(z-z_0)+\dots}$$

$z\to z_0$

$$\boxed{a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z_0} f=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)}$$

z_0 pol av ordning $\underline{m}$

(3) väsentlig: Utveckla (a_{-1})
(som vi gjorde med $e^{1/z}$)

Hur avgörs typen av singularitet och, om det är en pol, hur hittar vi ordningen?

typ: standardutvecklingar, $\lim \begin{cases}\exists \dots \\ \infty \\ \nexists \dots\end{cases}$

$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ g,h analytiska i $\{|z-z_0|<r\}$

$\boxed{h(z_0)=0}$

$\Longrightarrow$ f har isolerad singularitet i z_0, ty h analytisk $\Longrightarrow$ h:s nollställen isolerade

Utveckla g och h kring z_0:

$$f(z)=\frac{\overset{\neq 0}{b_p}(z-z_0)^p+b_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+\dots}{\underset{\neq 0}{c_m}(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots} \qquad \begin{matrix} p\geq 0 \\ m\geq 1\end{matrix}$$

(1) $p\geq m$: $f(z)=\dfrac{b_p(z-z_0)^{p-m}+\dots}{\underset{\neq 0}{c_m}+c_{m+1}(z-z_0)+\dots}$ hävbar

(2) $p<m$

$$f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{b_p} + b_{p+1}(z-z_0)+\dots}{\underset{\neq 0}{C_m}(z-z_0)^{m-p} + C_{m+1}(z-z_0)^{m-p+1}+\dots} =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^{m-p}} \cdot \frac{\overset{\neq 0}{b_p} + b_{p+1}(z-z_0)+\dots}{\underset{\neq 0}{C_m} + C_{m+1}(z-z_0)+\dots}$$

$m-p>0$ $\quad \frac{\text{analytisk} \neq 0}{\text{analytisk} \neq 0}$ i en omgivning till z_0 $\{|z-z_0|<\delta\}$

$\Rightarrow$ analytisk funktion i $\{|z-z_0|<\delta\}$

$\dots = \underset{\neq 0}{d_0} + d_1(z-z_0)+\dots$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{d_0}}{(z-z_0)^{m-p}} + \dots$$

Pol, ordning $m-p$ $\begin{cases} z_0\text{:s multiplicitet som nollställe till nämnaren} \\ - \quad \text{''} \quad - \quad \text{täljaren} \end{cases}$

2.5 / 4. $\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ > analytiska

$\sin \pi z = 0$: $\pi z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

singulära punkter: $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$(\sin \pi z)'\Big|_{z=k} = \pi \cos \pi z_k = \pi \cos k\pi \neq 0$$

$\Rightarrow z_k = k$ enkla nollställen till nämnaren

ej nollställen till täljaren $(m=1, p=0)$

$\Rightarrow z_k = k$ enkelpoler till $f(z) = \pi \cot \pi z$

---

6. $\frac{e^z - 1}{e^{2z} - 1}$

$e^{2z} = 1 \quad 2z = \log 1 = \underset{0}{\ln 1} + i(0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Nollställen till nämnaren i $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(e^{2z}-1\right)'\Big|_{z=k\pi i} = 2e^{2z}\Big|_{z=k\pi i} = 2 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow \text{enkla nollställen } (m=1)$$

(18) $e^z - 1 = 0 \quad z_l' = 2l\pi i \ , \quad l \in \mathbb{Z}$

p.s.s. enkla nollställen

(1) k jämnt $\Rightarrow z_0 = \underset{2l}{k}\pi i$ enkelt nollställe till både täljare och nämnare

$p = m \Rightarrow$ hävbar singularitet.

(2) k udda $\Rightarrow z_k = k\pi i = (2s+1)\pi i$

$p = 0, \ m = 1 \Rightarrow$ enkelpoler

Fö 2006-09-27

2.4 | 2. Multiplicitet för alla nollställen

$f(z) = (e^z - 1)^2$

(1) Taylorutveckla kring 0

$e^z - 1 = \cancel{1} + z + \frac{z^2}{2} + \ldots - \cancel{1}$

$(e^z - 1)^2 = z^2 + \ldots \quad \Rightarrow z_0 = 0$ nollställe med multiplicitet 2.

(2) $e^z - 1 = 0 \quad z_k = \underbrace{2\pi i}_{\text{en period}} \underline{k} \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(z_k) = 0$

$f'(z_k) = 2\underbrace{(e^{z_k} - 1)}_{0} e^{z_k} = 0$

$f''(z_k) = 2\underbrace{(e^{z_k})^2}_{=1} + 2\underbrace{(e^{z_k} - 1)}_{=0} e^{z_k} \neq 0$

$\Rightarrow$ alla nollställen ges av $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, alla har multiplicitet 2. (dubbla)

$\left(\frac{1}{(e^z - 1)^2} \text{ har poler av ordning 2 i } z_k, k \in \mathbb{Z} \right)$