2006–09–25

Uppgift Låt $f(z)$ vara den gren av $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ som är definierad i $\mathbb{C}\setminus\{z\colon \operatorname{Re} z=0, |\operatorname{Im} z|\leqslant 1\}$ och som uppfyller $f(1)=\sqrt{2}$. Beräkna $f(-1)$.

⟨fig1⟩

Notera att

$$f(z)=(z-\mathrm{i})_*^{\frac{1}{2}}(z+\mathrm{i})_\dagger^{\frac{1}{2}}$$

Där $*$ och $\dagger$ markerar val av gren.

$$f(z_{\text{start}})=\text{belopp}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+2k\pi)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2+2l\pi)/2}=$$

$$=\text{belopp}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)\pi}$$

Efter ett varv runt snittet

$$f(z_{\text{slut}})=\text{belopp}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+2\pi+2k\pi)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2+2\pi+2l\pi)/2}=$$

$$=f(z_{\text{start}})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{2}}=f(z_{\text{start}})\cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=f(z_{\text{start}})$$

$\Rightarrow$ Trots att ∞ inte är med så är snittet lämpligt för val av gren av $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

⟨fig2⟩.

$$f(z)=(z-\mathrm{i})_*^{\frac{1}{2}}(z+\mathrm{i})_\dagger^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\text{belopp}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+2k\pi)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2+2l\pi)/2}$$

$$f(1)=\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2l\pi\right)/2}=$$

$$=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)\pi}\overset{\text{givet}}{=\!=}\sqrt{2}$$

$(\ )^{\frac{1}{2}}, k\in\{0,1\}, l\in\{0,1\}$. Väljer $k=l=0$.

$$f(-1)=\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}+0\right)/2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}+0\right)/2}=\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{8\pi}{4}\right)/2}=-\sqrt{2}$$

⟨fig3⟩ $g(z)$ gren av $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$. $g(1)=\sqrt{2}$. Beräkna $g(-1)$.

Laurentutvecklingar

SATS: f analytisk i cirkelringen $\{r<|z-z_0|<R\}$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \forall z\in\{r<|z-z_0|<R\}.$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$[\neq \text{någon derivata av } f]$$

$\gamma\subset$ cirkelringen, går runt "hålet".

Bevis. (Imiterar beviset för Taylorutvecklingar.)
$\langle$fig4$\rangle$. $\Gamma = \gamma_{R_1} \cup$ snitt in $\cup\, (-\gamma_{r_1}) \cup$ snitt ut.

$$r < r_1 < R_1 < R$$

$$z\colon r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R \qquad (r_1, R_1 \text{ väljs lämpligt för } z)$$

f är analytisk på och innanför Γ. z ligger innanför Γ. Enligt Cauchys integraformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

$$\int_\Gamma = \int_{\gamma_{R_1}} + \int_{\text{snitt in}} + \int_{-\gamma_{r_1}} + \int_{\text{snitt ut}}$$

(snitt in och snitt ut är samma kurva åt olika håll)

$$\int_\Gamma = \int_{\gamma_{R_1}} - \int_{\gamma_{r_1}}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z}_{\circledast} - \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}z}_{\dagger}$$

$$\circledast = \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right) \mathrm{d}\zeta$$

Konvergent ty $|z - z_0| < R_1 = |\zeta - z_0| \Longleftrightarrow \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$. Integrera termvis:

$$= \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta + \left(\int_{g_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0) + \left(\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3} \mathrm{d}z\right)(z - z_0)^2$$

$$\dagger = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \mathrm{d}\zeta = -\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{-\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + 1} \mathrm{d}\zeta =$$

$$= -\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left(1 + \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots\right) \mathrm{d}z$$

Konvergent ty $|z - z_0| = r_1 < |z - z_0| \Longleftrightarrow \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. Integrera termvis:

$$= -\left(\int_{\gamma_{r_1}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0)^{-1} - \left(\int_{\gamma_{r_1}} f(z)(\zeta - z_0) \mathrm{d}z\right)(z - z_0)^{-2} -$$

$$- \left(\int_{\gamma_{r_1}} f(\zeta)\, (\zeta - z_0)^2\, \mathrm{d}\zeta\right)(z - z_0)^{-3} - \cdots =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z\right)(z - z_0)^n$$

Både γ_{r_1} och γ_{R_1} kan deformeras till γ

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_n)^n \quad \text{där } a_n=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, n\in\mathbb{Z} \qquad \square$$

Isolerade singulära punkter

DEFINITION: z_0 kallas isolerad singulär punkt (singularitet) för f om f är analytisk i en punkterad omgivning till z_0. (*deleted neighbourhood*).

f analytisk i $\{0<|z-z_0|<R\}$ (specialfall av cirkelring) $\Rightarrow f$ har Laurentutveckling i $\{0<|z-z_0|<R\}$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

DEFINITION:

1. Om utvecklingen ej innehåller negativa potenser (av $z-z_0$), så kallas z_0 **hävbar singularitet** (*removable*).

2. Om utvecklingen innehåller ändligt många negativa potenser, så kallas z_0 **pol**.

3. Om utvecklingen innehåller oändligt många negativa potenser, så kallas z_0 **väsentlig singularitet** (*essential*).

EXEMPEL.

1. Laurentserien = Taylorserie $\Rightarrow f$ analytisk.

$$\text{Ej definierad i 0:}\quad \frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

Utvecklingen kring 0 innehåller inga negativa potenser. 0 är en hävbar singularitet.

2. a.

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$$

Detta är precis f:s Laurentutveckling kring punkten 2. Detta är en pol av ordning 2.

DEFINITION: z_0 är pol till f, kring z_0:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} a_n=0\,\forall n<-m\\ a_{-m}\neq 0\end{aligned}\right\}\text{ då kallas } z_0 \text{ pol av ordning } m.$$

2. b.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

$z_0=0$ är en pol av ordning ett (enkelpol).

3.

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \cdots$$

$|z| > 0$. Här har vi oändligt många negativa potenser av z. $z_0 = 0$ är en väsentlig singularitet.

SATS: f analytisk i $\{0 < |z - z_0| < R\}$. Då:

1. z_0 är en hävbar singularitet $\iff \exists \lim_{z\to z_0} f(z) \neq \infty$.
2. z_0 är en pol $\iff \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
3. z_0 är en väsentlig singularitet $\iff \nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$, vare sig ändligt eller oändligt.

EXEMPEL: $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$: 0 är väsentlig singularitet.

$$\lim_{z=x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \infty$$

$$\lim_{z=x\to 0-} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 0$$

ÖVNING. Låt $A \in \mathbb{C}$. Visa att man kan välja sätt för z att gå mot 0 så att $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ går mot A. (Tips: $z \to 0 \iff |z| \to 0$)

SATS: (Weierstraß' sats). Om f har väsentlig singularitet i z_0 och $A \in \bar{\mathbb{C}}$, så finns sätt för z att närma sig z_0 så att $f(z) \to A$.

SATS: (Picards stora sats). f har en väsentlig singularitet i z_0, godtyckligt valt $\varepsilon > 0$ (litet, f ska vara analytisk i $0 < |z - z_0| < \varepsilon$).

$$\Rightarrow f \text{ antar alla komplexa tal som värden i } \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\},$$

utom möjligen ett tal.

ÖVNING. Visa att det är sant för $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0$. (Det undantagna talet är noll.)

Uppgift 2.3.4 Beräkna

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z = \begin{bmatrix} z = z - 0 \\ \sin z = f(z) \\ \text{Cauchys formel} \end{bmatrix} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\, f(0) = 2\,\pi\,\mathrm{i} \sin 0 = 0$$

Integranden är "egentligen" analytisk, även i nollan. Då säger Cauchys sats att det ska bli noll.

Uppgift 2.3.4′

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z/z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\,\pi\,\mathrm{i} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 2\,\pi\,\mathrm{i}$$

Alternativt:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\,\pi\,\mathrm{i}\, f'(0) = 2\,\pi\,\mathrm{i}$$