2006–09–21

Givet en cirkel och två olika punkter innanför denna, visa att det finns exakt två cirklar som går genom punkterna och tangerar den givna cirkeln. ⟨fig1⟩

$$\text{tangera} \mapsto \text{tangera} \quad (\text{konforma})$$

⟨fig2⟩. ⟨fig3⟩

$$\mathrm{OT}^2 = \mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OP}_2$$

(Allmänt $\mathrm{OP}_1 \cdot \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}$)

$$t^2 = \mathrm{OT}^2$$

⟨fig4⟩.

Val av entydig gren av flertydiga funktioner.

arg z är flertydig. Det är en väldigt användbar funktion, men det är ingen analytisk funktion (den är reellvärd $\Rightarrow$ ej analytisk).

$\arg_* z = \operatorname{Im} \log_* z \Longrightarrow$ harmonisk.

$\log z$ flertydig.

$$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2 \text{ i allmänhet}$$

$$\log_*(z_1 z_2) = \log_\dagger z_1 + \log_\ddagger z_2$$

Snitt, t.ex. $\operatorname{Log} z$.

Eller $\log z$ på en yta. ⟨fig5⟩. ⟨fig6⟩. Riemannyta.

Ingen logaritm är definierad i noll. "En riktigt, riktig singularitet" – men icke-isolerad: oavsett gren av logaritmen. Samma sak gäller ∞.

0, ∞ kallas **förgreningspunkter** för $\log z$.

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z): \quad \text{"i princip" flertydig}$$

Reella fallet: ⟨fig7⟩.

Problem Låt $f(z)$ vara den gren av $z^{\frac{1}{2}}$ som är definierad i $\mathbb{C} \setminus \{z\colon \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ och uppfyller $f(4) = -2$. Beräkna $f(\mathrm{i})$.

$$|f(\mathrm{i})| = 1; \qquad \left|z^{\frac{1}{2}}\right| = |z|^{\frac{1}{2}}$$

⟨fig8⟩.

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)/2}, \qquad k = 0, 1$$

Välj $\theta_0 = 0 \in]-\pi, \pi[$

θ_0: $4 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$.

$$\Rightarrow f(4) = \sqrt{4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(0 + 2k\pi)/2} = -2$$

$k \in \{0,1\} \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = -1 \Rightarrow k = 1.$

$$f(\mathrm{i}) = \sqrt{|\mathrm{i}|} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(z^2+1\right)\right)$$

Om $g(z)$ är analytisk i D, betrakta $\log(g(z))$. Ovan är $z^2 + 1 = 0$ i två punkter: hur lägga snittet?

$$g = 0 \quad \text{för} \quad z_1, z_2, \ldots, z_k$$

$$g = \infty \quad \text{för} \quad z_1', z_2', \ldots, z_l'$$

Här kan z_m eller z_m' vara ∞. ⟨fig9⟩.

I det aktuella fallet med $\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \infty$ ⟨fig10⟩.

∞ är *inte* förgreningspunkt för $\frac{1}{2}\log(z^2+1)$. ⟨fig11⟩.

"Löst" resonemang:

$$\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{"="} \quad z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nära ∞ är detta ungefär en heltalspotens. (Problemet är att $\left(z^2\right)^{\frac{1}{2}} \neq z$ i allmänhet: likhet efter lämpligt val).

Problem Låt $f(z)$ vara den gren av $\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ som är definierad i $\mathbb{C} \setminus \{z\colon \mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z \in [-1, 1]\}$ och som uppfyller $f(1) = \sqrt{2}$. Beräkna $f(2\mathrm{i})$.

Lösning: se nästa vecka, 2006–09–25! Nedanstående var inte riktigt optimalt.

$z^2 + 1 = (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$: Lättare att räkna argument vid multiplikation än vid addition.

⟨fig12⟩

$$\mathrm{i}: \quad -\frac{\pi}{2} < \arg_*(z-\mathrm{i}) \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

$$-\mathrm{i}: \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg_\dagger(z+\mathrm{i}) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(Gränser för så stora z att vi ligger utanför snittet.)

$$\arg_*(1-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg_\dagger(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg_*(2\mathrm{i}-\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg_\dagger(2\mathrm{i}+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$$

$$z-\mathrm{i}\colon \arg_*(z-\mathrm{i}) = \theta_1$$
$$z+\mathrm{i}\colon \arg_\dagger(z+\mathrm{i}) = \theta_2$$

$$[(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})]^{\frac{1}{2}} = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+2k\pi+\theta_2+2l\pi)/2}$$

Välj k, l, så att $f(1)=\sqrt{2}$.

$$[(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4}+2k\pi+\frac{\pi}{4}+2l\pi)/2}=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)\pi}\overset{!}{=\!=}\sqrt{2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)\pi}=1$$

$k=l=0$ eller $k=l=1$.

$$f(2\,\mathrm{i})=\sqrt{|-3|}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+0)/2}=\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$\begin{bmatrix}\arg(z-\mathrm{i})=\arg_*(z-\mathrm{i})+2k\pi\\ \arg(z+\mathrm{i})=\arg_\dagger(z+\mathrm{i})+2\,l\pi\end{bmatrix}$$