2006–09–14

Fixa punkter för en Möbiusavbildning

DEFINITION: avbildning $f: X \to X$. x_0 kallas **fixpunkt** om $f(x_0) = x_0$.

|||.

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \qquad (a\,d - b\,c \neq 0)$$

Vi letar efter z_0:

$$z_0 = \frac{a\,z_0 + b}{c\,z_0 + d}$$

$$c\,z_0^2 + (d - a)\,z_0 - b = 0$$

Har max två lösningar (om koefficienterna är icke-noll) $\Rightarrow$ en Möbiusavbildning har max två fixpunkter.

Om ekvationen har fler än två olika lösningar $\Rightarrow$ alla koefficienter $= 0 \Rightarrow f(z) = z$.

$\Rightarrow$ En Möbiusavbildning som har tre fixpunkter måste vara identitetsavbildningen.

Vad innebär det om ∞ är en fixpunkt?

∞ är en fixpunkt $\iff$ $c = 0$. $f(z) = a\,z + b$.

DEFINITION: $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Det **dubbla förhållandet** (*cross ratio*) mellan dem:

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

SATS: Möbiusavbildningar bevarar det dubbla förhållandet mellan fyra punkter, det vill säga

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = (f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$$

(utan bevis).

$$z_1, z_2, z_3 \overset{?}{\longmapsto} w_1, w_2, w_3$$

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{f(z) - w_1}{f(z) - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

(att föredra i teoretiska resonemang).

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = w$$

$$a\,z + b = c\,z\,w + d\,w$$

$$z(c\,w - a) = -\,d\,w + b$$

$$z = \frac{-\,d\,w + b}{c\,w - a} = f^{-1}(w)$$

Inversen är också en Möbiusavbildning.

$$a\,d-b\,c\neq 0$$

$$(-d)(-a)-b\,c\neq 0$$

Om f och g är Möbiusavbildningar, då är $f\circ g$ också en Möbiusavbildning:

$$\frac{a\,\frac{A\,z+B}{C\,z+D}+b}{c\,\frac{A\,z+D}{C\,z+D}+d}$$

Inversion

Kongruensavbildningar i plan geometri:

- Translation — konform
- Rotation (kring en punkt) — konform
- Spegling (i en linje) — ej konform ⟨fig1⟩. Vinklar bevaras till storleken, men riktningen byts.

⟨fig2⟩ Spegling i realaxeln: $f(z)=\bar{z}$. Ej analytisk i någon punkt.

Inversion = spegling i en cirkel ⟨fig3⟩.

Definition: $\mathcal{P}'$ kallas **invers** till $\mathcal{P}$ med avsenede på cirkeln k om $P'\in$ strålen $\mathcal{OP}$ och

$|\mathcal{OP}|\cdot|\mathcal{OP}'|=$ radien^2. $\mathcal{O}$ och ∞ är inverser till varandra.

$|||$.

$$\mathcal{P}\in k\Longleftrightarrow\mathcal{P}\in\mathcal{P}'$$

Om $\mathcal{P}$ ligger innanför cirkeln, så ligger $\mathcal{P}'$ utanför cirkeln och vice versa.

$\mathcal{P}'$ är invers till $\mathcal{P}$ $\Longleftrightarrow\mathcal{P}$ är invers till $\mathcal{P}'$

Inversion är en isogonal, men ej konform avbildning.

⟨fig4⟩.

Linje genom $\mathcal{O}\overset{\text{invesion}}{\longrightarrow}$ linje genom $\mathcal{O}$.

Linje ej genom $\mathcal{O}\overset{\text{inversion}}{\longrightarrow}$ cirkel.

$\frac{1}{z}$ är väldigt deriverbar, och därmed väldigt konform.

Inversion med avseende på enhetscirkeln:

⟨fig5⟩. Låt z^* vara den inversa punkten till z med avseende på enhetscirkeln. $z^*\in$ strålen $0z$ $\Rightarrow$ $\arg z^*=\arg z$ (välj θ). ($z^*=\lambda z,\lambda>0$).

$$|z|\cdot|z^*|=1^2=1$$

$$|z^*|=\frac{1}{|z|}$$

$$\Rightarrow z^*=\frac{1}{|z|}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\frac{1}{|z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{\bar{z}}$$

Uppgift

Givet: en cirkel och två punkter innanför denna. Visa att det finns exakt två cirklar som går genom de två punkterna och tangerar den givna cirkeln. (Lättare: två punkter och en linje.)

⟨fig6⟩.

$$w = \frac{1}{z}$$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & \infty \\ 1 & \mapsto & 1 \\ \infty & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} z_1, z_2 & \mapsto & w_1, w_2 \\ \mathrm{Re} & \mapsto & \mathrm{Re} \end{array}$$

Tangera $\mapsto$ tangera på grund av konformiteten.

Inversion med avseende på godtycklig cirkel (uttryckt i termer av komplexa funktioner).

⟨fig7⟩.

$$z_1 = z - z_0$$

$$z_2 = \frac{1}{r} z_1$$

$$z_2^* = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{r}{\bar{z} - \bar{z}_0}$$

$$z_1^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}$$

$$z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0$$

$$(z^* - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$$