2006–09–11

$f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisk i området D (öppen, sammanhängande mängd):

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Re} f \\ v = \operatorname{Im} f \end{cases} \quad \text{båda harmoniska}$$

$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$.

Följer av Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Om f är analytisk i $D \Rightarrow$ Cauchy-Riemmans ekvationer är uppfyllda i D.

Om $u, v \in \mathcal{C}^1(D)$, Cauchy-Riemann gäller i $D \Longrightarrow f$ är analytisk i D.

Definition: $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.

e^z är en hel funktion (analytisk i $\mathbb{C}$). $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^z}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^z$.

$$\left(f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\exists f' \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$$

Definition:

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

Om $z = x \in \mathbb{R}$ så får vi de vanliga sinus- och cosinus-funktionerna.

Definition:

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

Samma formler gäller som i det reella fallet. Bevisen skiljer sig dock:

$$(\sin z)' = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \right)' = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\,\mathrm{i}} = \cos z$$

$$\begin{bmatrix} (f+g)' = f' + g' \\ (fg)' = f'g + fg' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

e^z visar sig vara periodisk med perioden $2\pi\mathrm{i}$. $\mathrm{e}^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$.

Även $\cosh, \sinh$ blir periodiska. $\sin z, \cos z$ är **obegränsade** för komplexa z.

$$\sin(\mathrm{i}\, y) = \frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} \right) = i \sinh(y)$$

Alltså har vi $|\sin(\mathrm{i}y)| \to \infty$ då $y \to \infty$, ty $|\mathrm{i} \sinh(y)| = |\sinh y| \to \infty$ då $y \to \infty$.

$$\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$$

Logaritmfunktionen

Flertydig! $\log z = ?$ Inversen till e^z. Sätt $w = \mathrm{e}^z$, $\log w = ?$

$$\mathrm{e}^z \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) = w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x = \rho & \Longleftrightarrow \quad x = \ln\varphi \\ y = \varphi + 2\,k\,\pi = \arg w, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z = \log w \quad \text{om} \quad \begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \ln|w| \\ y = \operatorname{Im} z = \arg w \end{cases}$$

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \quad \forall z \neq 0$$

Exempel.

1)

$$\log(-1) = \underbrace{\ln|-1|}_{0} + \mathrm{i}\,(\pi + 2k\pi)$$

$$\log(-1) = \mathrm{i}(2k+1)\,\pi$$

2)

$$\log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\right)$$

Definition: z^α, där $z, \alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log z}$$

I allmänhet flertydig.

$$z^2 = \mathrm{e}^{2\log z} = \mathrm{e}^{2(\ln|z| + \mathrm{i}(\theta_0 + 2k\pi))} = \mathrm{e}^{2\ln|z| + 2\mathrm{i}\theta_0}\underbrace{\mathrm{e}^{4k\pi\mathrm{i}}}_{=1} = \mathrm{e}^{\ln|z|^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta_0} = z^2$$

Ofta vill man ***välja entydiga grenar*** av flertydiga funktioner. ⟨fig1⟩

Entydighet: man ska inte kunna gå runt origo.

Snitt: mellan 0 och ∞. ⟨fig2⟩

Principalgren av $\arg z$: man skär upp längs negativa realaxeln. Vi får då $\operatorname{Arg} z$.

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$$

(Vi studerar ofta områden: öppna, då spelar gränsen ingen roll.)

$\operatorname{Arg} z$ är ingen analytisk funktion. Område:

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

Exmepel:

$$\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\ln 1 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$$

Om $f = u + \mathrm{i}v$ är analytisk i $D \Longrightarrow u, v$ harmoniska.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

u, v är varandras harmoniska konjugat.

Fråga: Om u är harmonisk i D, finns det en analytisk funktion $f: D \to \mathbb{C}$ så att $u = \operatorname{Re} f$?

Svar: Nja. Ja om D är enkelt sammanhängande.

4.1.1.a)

$$u(x, y) = x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4$$

$$D = \mathbb{R}^2 \quad \text{“=”} \quad \mathbb{C}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{?}{=\!=} 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4\,x^3 - 12\,x\,y^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 \end{cases}$$

På grund av symmetri får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12\,y^2 - 12\,x^2$$

$$\Delta u = 0: \quad \text{harmonisk funktion}$$

Vill rekonstruera v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12\,x\,y^2$$

$$v = \int (4x^3 - 12\,x\,y^2)\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

Där $\varphi(x)$ är en godtycklig funktion av x, konstant med avseende på y.

$$v = 4\,x^3 y - 4x\,y^3 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12\,x^2\,y - 4\,y^3 + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3 + 12y\,x^2$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x) \equiv 0 \Longrightarrow \varphi(x) = \text{konstant} \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \exists f(z): u = \operatorname{Re} f$$

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \mathrm{i}\left(4\,x^3 y - 4x\,y^3\right) + \mathrm{i}\,C$$

Uttryck i termer av z.

1. $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$, $\bar{z}$ ska försvinna.

2. Tag $y=0$ och byt ut x mot z.

$$f(z)=z^4+\mathrm{i}\,C$$

Möbiusavbildningar (Kapitel 3: *Linear fractional transformations*)

$$f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}, \quad z\in\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

$$a,b,c,d\in\mathbb{C}$$

$$\frac{a\,z+b}{c\,z+d}=\frac{c\,a\,z+b\,c}{a\,c\,z+\mathrm{da}}\cdot\frac{a}{c}=\frac{a}{c}\cdot\left(1+\frac{b\,c-a\,d}{a\,c\,z+a\,d}\right)=\frac{a}{c}+\frac{b\,c-a\,d}{c^2\,z+c\,d}=$$

$$=\text{konstant}+\text{något/linjär sak}$$

Krav: $b\,c-a\,d\neq 0$ (annars blir det ju väldigt ointressanta avbildningar).

f är en sammansättning av följande tre typer:

$z+A$	translation
$B\,z$	omskalning och rotation
$\frac{1}{z}$	inversion (spegling i cirkel)

$$f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{b\,c-a\,d}{c\,z+d}$$