2007–02–05

$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \int_0^\infty f(x)\cos x\,\xi\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \int_0^\infty f(x)\sin x\xi\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F}_c(f')(\xi) = \int_0^\infty f'(x)\cos x\,\xi\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty f(x)\,(\cos(x\xi))'\,\mathrm{d}x - f(0)\cos 0 =$$

$$= \xi\,\mathcal{F}_s(f)(\xi) - f(0)$$

$$\mathcal{F}_s(f')(\xi) = \int_0^\infty f'(x)\sin x\xi\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty f(x)\,(\sin(x\xi))'\,\mathrm{d}x = -\,\xi\,F_c(f')(\xi)$$

Vilken Fouriertransformation ska man använda när man löser differentialekvationer på halvaxeln?

1. Beteeende i ∞:

   Om den sökta funktionen avtar snabbt $\Rightarrow$ Fourier.

   Om inte: Laplace.

2. Randvillkor i noll:

   Om $f(0) = 0$: sinus.

   Om $f'(0) = 0$: cosinus.

Diracs δ-‘funktion’.

Approximation: ⟨fig1⟩

$$\delta(t) = \text{“}\lim_{\varepsilon\to 0}\text{”}\,\omega_\varepsilon(t)$$

“lim” betyder att:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^\infty \omega_\varepsilon(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

för glatta funktioner φ.

Fouriertransformationen av δ?

$$\hat{\delta}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\omega}_\varepsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\hat{\chi}_\varepsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\sin(\varepsilon\xi)}{2\,\varepsilon\,\xi} = 1$$

Faltning med δ. $f * \delta = ?$

$$\mathcal{F}(f*\delta)(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\underbrace{\hat{\delta}(\xi)}_{=1} = \hat{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow f*\delta = f$$

Signal- och system-analys

$$\underset{\text{insignal}}{\xrightarrow{x(t)}} \boxed{\quad ? \quad} \underset{\text{utsignal; svar på } x(t)}{\xrightarrow{y(t)}}$$

DEFINITIONER:

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t)$$

1. Systemet S kallas linjärt om $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha\, S(x_1(t)) + \beta\, S(x_2(t))$

2. Systemet S kallas tidsinvarieant om $x(t-T) \xrightarrow{S} y(t-T)$ för alla T. Systemets egenskaper ändras inte med tiden.

Impulssvar: Svaret på insignalen $\delta(t)$.

$$\delta(t) \xrightarrow{S} h(t) = \text{impulssvaret}$$

SATS: $S: x(t) \mapsto x(t) * h(t) = y(t)$.

$S: \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mapsto \hat{h}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = H(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Om $\hat{h}$ är reell: $\cos\omega t \to \hat{h}(\omega) \cos\omega t$.

Faltning med δ:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$y(t) = S(x(t)) = S\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right) =$$

$$\overset{\text{linjärt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, S(\delta(t-\tau))\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) \mathrm{d}\tau = x * h$$

Svaret på en periodisk signal. $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

$$y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} * h(t) = h * \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \hat{h}(\omega)$$

Tolkning av $\hat{h}$. $\hat{h}(\omega) = |\hat{h}(\omega)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}$. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \longmapsto |\hat{h}(\omega)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\varphi(\omega)}$ där $|\hat{h}(\omega)|$ kallas amplitudfunktionen. $\varphi(\omega)$ kallas fasfunktionen.

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{x}(\omega)$$

Antag att vi gjorde ett experiment: $x_0(t) \longmapsto y_0(t)$.

$$\hat{y_0}(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{x}_0(\omega)$$

$$\Longrightarrow \hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y_0}(\omega)}{\hat{x}_0(\omega)}$$

Så har man $\hat{h}(\omega)$ och då kan man beräkna $y(t)$ för en godtycklig $x(t)$.

DEFINITION: S kallas kausalt om $y(t)$ endast beror på värdet på insignalen i tiden $\tau \leqslant t$.

SATS: Systemet är kausalt $\Longleftrightarrow$ $h(t) = 0$ för negativa t. (Bevisa själv.)

DEFINITION: Stabilt: Om svaret på en begränsad signal $x(t)$ är begränsad.

SATS: Systemet är stabilt $\Longleftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\mathrm{d}t \quad \text{konvergerar}$$

(impulssvaret $\in L^1$).

Fouriertransformation i praktiken (Diskret Fouriertransform.)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

1. Vi betraktar f på något ändligt intervall $(0, \Omega)$. Ersätter integral med

$$\hat{f}(\omega) \approx \int_{0}^{\Omega} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

2. Ersätter integralen med en summa. Vi tar N och delar $(0, \Omega)$ i N delintervall:

$$t_n = \frac{\Omega}{N} \cdot n$$

$$\hat{f}(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_n} \cdot \frac{\Omega}{N} = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{\Omega n}{N}} \cdot \frac{\Omega}{N}$$

$f(t_n) = a_n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{\Omega n}{N}} = \hat{a}(\omega)$$

kallas diskret Fouriertransformation av den ändliga följden a_n.

$\omega_m = \frac{2\pi\,m}{\Omega}$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi m n}{N}} = \hat{a}_m$$

Inversionsformel för DFT.

k: $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Multiplicera med $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi m k/N}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi m(k-n)/N} = \hat{a}_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi m k/N}, \quad m = 0, \ldots, N-1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi m(k-n)/N} = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi k m/N}$$

Ur summaformeln för geometriska serier:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi m(k-n)/N} = \begin{cases} 0, & \text{om } k \neq n \\ N, & \text{om } k = n \end{cases}$$

Endast termen med $n=k$ överlever.

$$N a_k = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \, \mathrm{e}^{imk\cdot 2\pi/N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \, \mathrm{e}^{imk\cdot 2\pi/N}$$

Antalet operationer vid beräkningar av DFT: för varje m behöver vi N multiplikationer och N additioner. Tillsammans: $N\cdot N$ mulitplikationer och $N\cdot N$ additioner.

FFT: gruppering av termer. $N=2^l$. Antalet operationer: $N\ln N$.

16

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \frac{t}{(4+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4+t^2}\right)'$$

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)$$

$$\hat{x}(\omega) = \pi \cdot \mathrm{e}^{-|\omega|}$$

$$\hat{y}(\omega) = ?$$

$$\frac{1}{2^2+t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|\omega|}$$

$$\left(\frac{1}{4+t^2}\right)' \quad \xrightarrow{F} \quad \mathrm{i}\,\omega\,\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2|\omega|}$$

$$\frac{t}{(4+t^2)^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad -\mathrm{i}\omega\,\frac{\pi\mathrm{e}^{-2|\omega|}}{4} = \hat{y}(\omega)$$

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = \frac{-\mathrm{i}\omega\pi\mathrm{e}^{-2|\omega|}\cdot\frac{1}{4}}{\pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}} = -\frac{\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-|\omega|}}{4}$$

$$\mathrm{e}^{-|\omega|} \quad \xleftarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

$$\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{-|\omega|} \quad \xleftarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)' = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^2}$$

$$S(\cos\omega t) = ?$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

$$S(\cos\omega t) = \frac{1}{2}\left(S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) + S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\right) = \frac{1}{2}\left[\hat{h}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \hat{h}(-\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{-|\omega|}}{4}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{e}^{-|\omega|}}{4}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] = \frac{1}{4}\,\omega\,\mathrm{e}^{-|\omega|}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{4}\,\omega\,\mathrm{e}^{-|\omega|}\sin\omega t$$

Uppgift 17

$$h(t) = \mathrm{e}^{-4t^2}$$

$y(t)$ är svaret på insignalen e^{-t^2}. Hitta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} h(t)\, y(t) \mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} h(t)\, y(t) \mathrm{d}t = \mathcal{F}[h\, y][-1] = \frac{1}{2\pi}\Big[\hat{h} * \hat{y}\Big](-1)$$

$$\hat{h}(\omega) = \Big(\mathrm{e}^{-4t^2}\Big)^{\wedge} = [\mathrm{rad}\, 9, a = 8] = \left(\frac{2\pi}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\omega^2/16}$$

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega) \cdot \hat{x}(\omega) = [a = 2] = \hat{h}(\omega) \cdot \mathrm{e}^{-\omega^2/4} \sqrt{\frac{2\pi}{2}}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2\pi}{4} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{16} - \frac{\omega^2}{4}} = \frac{2\pi}{4} \mathrm{e}^{-\frac{5}{16}\omega^2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \hat{h}(s) \hat{y}(\omega - s) \mathrm{d}s \quad \text{för } \omega = -1$$

$$= C \int \mathrm{e}^{-s^2/16} \cdot \mathrm{e}^{-(-1-s)^2 \cdot 5/16} \mathrm{d}s = C \int \exp\left[-\frac{6s^2 + 10\, s + 5}{16}\right] \mathrm{d}s =$$

$$= C \int \exp\left[-\frac{6\left(s + \frac{5}{6}\right)^2 + 5 - \frac{25}{36}}{16}\right] \mathrm{d}s = \left[s + \frac{5}{6} = u\right] =$$

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-6u^2/16} \mathrm{d}u$$

Uppgift 18

Insignal $x(t)$, utsignal $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4 + t^2} \\ y(t) = \mathrm{e}^{-2t^2} \end{cases}$$

Impulståg $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} (2\delta(t - 2n) - \delta(t - 2n - 1))$$

⟨fig2⟩.

Steg ett: utveckla $u(t)$ i Fourierserie.

$$u(t) = \sum u_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}$$

$$u_n = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi t} \mathrm{d}t$$

Steg två: hitta $\hat{h}(\omega) = \hat{y} / \hat{x}$.

Steg tre: $(Su)(t) = \sum u_n S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}) = \sum u_n \hat{h}(n\pi t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}$.