2007–01–29

Fourierserie på ett intervall

1) Låt $f(\theta)$ vara definierad på intervallet $-\pi < \theta < \pi$. Vi fortsätter f till hela $\mathbb{R}$ som en periodisk funktion. ⟨fig1⟩

2) Låt $f(\theta)$ vara definierad på intervallet $0 < \theta < \pi$. ⟨fig2⟩. Fortsätter på $(-\pi, 0)$.

... som en udda funktion eller

... som en jämn funktion.

Fourier-serie för den jämna fortsättningen:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\theta, \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \,\mathrm{d}\theta$$

utveckling i cosinus-Fourier-serie.

Foiurier-serie för den udda fortsättningen

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \,\mathrm{d}\theta$$

⟨fig3⟩

Konvergens av Fourier-serier på $(0, \pi)$.

1) cos-F-serie konvergerar mot $\frac{f(\theta_+) + f(\theta_-)}{2}$ för alla $\theta \in (0, \pi)$ och mot $f(0+); \theta = 0$. $f(\pi-), \theta = \pi$.

2) sin-F-serie konvergerar mot $\frac{f(\theta_+) + f(\theta_-)}{2}$, $0 < \theta < \pi$ och mot 0 då $\theta = 0, \theta = \pi$.

Fourier-serie på ett godtyckligt intervall

1) $x \in (-L, L)$; $F(x)$. Variabelbyte: $\theta = \frac{x\,\pi}{L}$, $x = \frac{\theta\, L}{\pi}$.

$$g(\theta) = F\left(\frac{\theta\, L}{\pi}\right)$$

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{in\theta}$$

$$F\left(\frac{\theta L}{\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{in\frac{\pi x}{L}}$$

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{in\frac{\pi x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{\theta L}{\pi}\right) \mathrm{e}^{-in\theta} \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F(x)\,\mathrm{e}^{-in\pi x/L} \mathrm{d}x$$

2) $F(x), 0 < x < L$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\,\pi\,x}{2}; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\cos\frac{n\pi\,x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$F(x) = \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{L}; \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\,\pi\,x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Värmeekvationen $u_t - u_{xx} = 0.\ 0 < x < \pi, t > 0$

$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$; $u(0,x) = \varphi(x)$.

Vi söker lösningen $u(t,x)$ som en F-serie i x-variabeln med koefficienterna beroende av t. Randvillkoren ger: sinus-F-serie.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\sin n\,x$$

Sätter in i evkationen:

$$\mathrm{VL} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n'(t)\sin n\,x - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\,(-n^2)\sin n\,x = \sum_{n=1}^{+\infty}\big(b'(t) + n^2 b_n(t)\big)\sin nx = \mathrm{HL} = 0$$

Fourierserie av funktionen 0. Fourierkoefficienterna av nollfunktionen är noll.

$$b_n'(t) + n^2 b_n(t) = 0$$

$$b_n(t) = b_n(0)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}$$

$$u(t,x) = \sum b_n(0)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\sin \mathrm{nx}$$

$$u(0,x) = \sum b_n(0)\sin n\,x = \varphi(x)$$

Det är F-serie för φ på $[0,\pi]$. $b_n(0)$ är Fourierkoefficienterna av φ.

$$b_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin n\,x\,\mathrm{d}x$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin n\,x\,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-n^2 t}\sin n\,x$$

Varför är det tillåtet att termvis derivera Fourierserie för lösningen?

För $t > 0$:

$$b_n(t) = b_n(0)\cdot \mathrm{e}^{-n^2 t}$$

går mot 0 väldigt snabbt då $n \to \infty$.

$$\sum |b_n(0)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}| \quad \text{konvergerar}$$

Deriverade serier:

$$\sum |n\,b_n(0)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}| \quad \text{konvergerar}$$

$$\sum |n^2\,b_n(0)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}| \quad \text{konvergerar}$$

Enligt Weierstraß' test konvergerar deriverade F-serie likformigt.

$\Rightarrow$ derivator av $u(t,x)$ kontinuerliga. $u(t,x)$ deriverbar många gånger

$\Rightarrow$ det är tillåtet att termvis derivera.

Värmeekvationen $u_t - u_{xx} = 0$. $0 < x < \pi, t > 0$

$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$; $u(0,x) = \varphi(x)$. Randen är värmeisolerad.

$$\sum a_n \cos nx$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos n\,x) = -\,n\sin n\,x$$

$$u(t,x) = \sum a_n(t)\cos nx$$

Sätt in i ekvationen:

$$\sum (a_n' + n^2 a_n)\cos n\,x = 0$$

Det är en Fourierserie av funktionen noll. Funktionen noll har Fourierkoefficienterna 0.

$$\Rightarrow a_n'(t) + n^2\,a_n(t) = 0$$

$$a_n = a_n(0)\cdot \mathrm{e}^{-n^2 t}$$

$a_n(0)$ hittar vi ur begynnelsevillkoret.

$$u(0,x) = \sum a_n(0)\cos nx = \varphi(x)$$

$a_n(0)$ är cos-F-koefficienterna av φ.

En variant till

$u(t,0) = 0; u_x(t,\pi) = 0$

Vågekvationen

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$\begin{cases} 0 < x < \pi \\ t > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum b_n(t)\sin n\,x$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(b_n''(t)\sin n\,t + n^2 b_n(t)\sin n\,x\right) = \sum (b_n'' + n^2 b_n)\sin nx = 0$$

$$b_n'' + n^2\,b_n = 0$$

Karakteristiska rötter $k = \pm\,n\,\mathrm{i}$ ger

$$b_n(t) = A_n\cos nt + B_n\sin n\,t$$

A_n och B_n får vi ur begynnelsevillkoren ($b_n(0) = A_n, \quad b_n'(0) = B_n$):

$$u(0, x) = \sum b_n(0) \sin n\, x = \varphi(x)$$

$b_n(0)$ — sin-F-koefficient av φ:

$$b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin n\, x \, \mathrm{d}x$$

$b_n'(0)$:

$$u_t(0, x) = \sum b_n'(0) \sin n x = \psi(x)$$

$b_n'(0)$ är sin-F-koefficenterna av ψ:

$$b_n'(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin n\, x \, \mathrm{d}x$$

$$u(t, x) = \sum (A_n \cos n\, t + B_n \sin n\, t) \sin n\, x$$

Fourier-transformation (kapitel 7)

$f(x), -\infty < x < \infty, \; f \to 0, \; |x| \to \infty.$

"Vi antar att funktionen går mot noll i oändligheten, kanske tillräckligt snabbt."

$x \in (-L, L)$

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum c_{n,L} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} n x \pi / L}$$

$$c_{n,L} = \int_{-L}^{L} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} n y \pi / L} \, \mathrm{d}y$$

$$\xi_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta\xi = \frac{\pi}{L}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum c_{n,L} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi_n} \Delta\xi$$

$$\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n$$

När $L \to \infty$:

$$c_{n,L} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_n y} \mathrm{d}y = \hat{f}(\xi_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum \hat{f}(\xi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi_n} \Delta\xi \quad \to \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi} \, \mathrm{d}\xi$$

$$\begin{cases} \hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} \mathrm{d}y \\ f(x) = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\xi \end{cases}$$

$\hat{f}(\xi)$ kallas Fouriertransformationen av $f(x)$. Den andra formeln kallas för inversionsformeln.

$\mathcal{F}$; invers: $\mathcal{F}^{-1}$.

$$f(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\supset} \quad \hat{f}(\xi)$$

För processer i tiden t, vinkelfrekvens ω.

DEFINITIONER:

$L^1 = L^1(\mathbb{R}) =$ rummet av funktioner $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{konvergerar}$$

$L^2 = L^2(\mathbb{R}) =$ rummet av funktioner $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{konvergerar}$$

Om $f \in L^1$, så $|f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}| = |f(y)|$ $\Rightarrow$ integralen i $\hat{f}(\xi)$ konvergerar och $\hat{f}$ kan definieras.

EXEMPEL.

1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} - b < x < b \\ 0 & \text{om } |x| > b \end{cases}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{-\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\right]_{-b}^{b} = \frac{1}{-\mathrm{i}\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi}\right) = \frac{2\sin b\xi}{\xi}$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax}, \quad a > 0, & \text{om } x > 0 \\ 0, & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ay}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{-a-\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{-ay-\mathrm{i}y\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

3)

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}$$

Inversionssatsen i L^1

Låt $f \in L^1$ och styckvis glatt. Då gäller

1)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\xi^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = [\text{om } f \text{ är kontinuerlig}] = f(x)$$

Faktorn $\mathrm{e}^{-\varepsilon\xi^2}$ regulariserar integralen för att göra den konvergent.

2) Om $\hat{f}$ också tillhör L^1, så

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Diskussion om L^1 och L^2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } x < 1 \\ x^{-\alpha}, & \text{då } x > 1 \end{cases}$$

$$L^1\colon \quad \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, \mathrm{d}x \quad \text{konvergerar om } \alpha > 1$$

$$L^2\colon \quad \int_1^{+\infty} x^{-2\alpha}\, \mathrm{d}x \quad \text{konvergerar om } \alpha > \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & \text{om } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$L^1\colon \quad \int_0^1 x^{-\alpha}\, \mathrm{d}x \quad \text{konvergerar för } \alpha < 1$$

$$L^2\colon \quad \int_0^1 x^{-2\alpha} \quad \text{konvergerar för } \alpha < \frac{1}{2}$$

Funktioner i L^1 måste gå mot noll snabbare än i L^2, men de tillåter starkare lokala singulariteter.

Fouriertransformation och inversion i L^2

Vi definierar Fouriertransformation för $f \in L^2$ enligt

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon y^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} y \xi}\, \mathrm{d}y$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon \xi^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi}\, \mathrm{d}\xi \to \begin{cases} f(x) & \text{om } f \text{ är kontinuerlig i } x \\ \frac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{annars} \end{cases}$$

Om $f(x) \in L^2$:

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon y^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \xi y}\, \mathrm{d}y$$

och

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|^2 \mathrm{d}x = 0 \quad \left(\text{konvergerar i } L^2\right)$$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\varepsilon \xi^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi}\, \mathrm{d}\xi$$

$$f_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi}\, \mathrm{d}\xi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_R(x)|^2 \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \quad \text{då } R \to +\infty$$