2007–01–22 Grigori Rozenblioum, 5309, ⟨grigori@math.chalmers.se⟩, MVL2071

Värmeekvationen i en rumsvariabel x och tiden t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Vi söker $u(x,t)$: temperaturen i punkten x vid tiden t.

$u(x,0) = \varphi(x)$ — begynnelsevillkor. $0 < x < \pi$.

$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$ — randvillkor.

Detta blir randvärdesproblemet för värmeekvationen.

Lösning

Steg 1: Vi söker enkla, elementära lösningar på formen $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

Vi kastar bort begynnelsevillkoret.

Sätter i ekvation: $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

$$X(x)\,T_t(t) - X_{xx}(x) \cdot T(t) = 0$$

delar med $X(x)\;T(t)$ — vi gör det formellt, för det finns en risk att något är noll, och "det är väldigt starkt förbjudet att dela med noll":

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda = \text{konstant (ty VL oberoende av } x\text{, HL oberoende av t)}$$

***X*-ekvationen:**

$$X_{xx} - \lambda X = 0$$

Detta är en linjär, ordinär differentialekvation (ODE). Randvillkor: samma som för u: $X(0) = 0$; $X(\pi) = 0$.

Karakteristisk ekvation:

$$k^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{\lambda}$$

Allmänna lösningen:

$$X(x) = A\,e^{\sqrt{\lambda}x} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Sätter in i randvillkoret:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\pi) = A\,e^{\sqrt{\lambda}\pi} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A \\ X(\pi) = A\left(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\right) = 0 \end{cases}$$

$A = 0$ ger ingen intressant lösning ($X(x) = 0$).

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\pi} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\pi}}_{\neq 0}\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda}\pi} - 1\right) = 0$$

$$\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1$$

$$2\sqrt{\lambda}\pi = 2\,\pi\,n\,\mathrm{i}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda} = n\,\mathrm{i}$$

$$\lambda = -\,n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$X(x) = A\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) = 2\,A\,\mathrm{i}\sin n\,x$$

$n = 0$ går inte (X blir 0). $n \in \mathbb{N}^+$ passar. Vi tar det A som är bekvämt: $A = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}$.

$$X_n(x) = \sin n\,x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

T-ekvationen

$$T_t(t) = \lambda\,T(t)$$

$$T(t) = a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

där a är en godtycklig konstant. Ett system av lösningar:

$$T_n(t) = a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Steg 2:

Vi kombinerar elementära lösningar för att uppfylla begynnelsevillkoret.

Vi söker lösningen $u(x,t)$ på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\sin nx$$

Anpassa koefficienterna a_n så att begynnelsevillkoret uppfylls.

Sätter $t = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x)$$

"... och det blir dags för stort trolleri nummer två."

Multiplicera ekvationen med $\sin kx$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\,x)\sin(kx) = \varphi(x)\sin\,(k\,x)$$

Integrerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin(n\,x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(k\,x)\;\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Alla dessa integraler, utom en försvinner. Om $k \neq n$:

$$\int_0^{\pi} \sin(n\,x)\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Bara $n = k$ överlever.

$$\int_0^{\pi} (\sin kx)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^{\pi} \sin(k\,x)\;\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\,x)\;\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Fourierserie av periodiska funktioner

$$f(\theta){:}\quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta), \qquad -\infty < \theta < +\infty$$

De enklaste periodiska funktionerna är $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Vi vill framställa funktionen f som en summa av $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

För att hitta c_n multiplicerar vi med $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$ (“vi ska se senare varför det blir bättre med minus”) och integrerar:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

– “ett osynligt fel, som blir synligt på fredag”.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}}{i(n-k)}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)2\pi} - 1}{\mathrm{i}(n-k)} = 0 & \text{om } n \neq k \\ = 2\pi & \text{om } n = k \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Talen c_n kallas Fourierkoefficienterna av $f(\theta)$ med avseende på systemet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \text{ kallas Fourierserien av } f \text{ med avseende på systemet } \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$