2006–12–12

Vanliga approximationer till "ideala" filter

☐ Butterworth

$|H(\mathrm{i}\omega)|$ är maximalt slät. Monotont avtagande för ökad frekvens (lågpass).

☐ Chebyshev 1

$|H(\mathrm{i}\omega)|$ rippel i passband, monotont avtagande i stoppband.

☐ Besselfilter

Linjär fas eftersträvas.

Butterworthkarakteristik

(Approximation till ett idealt lågpass-filter)

$$H(s) = \frac{H_0}{B(s)}$$

där $B(s)$ är Butterworthpolynomet.

$$|B(\mathrm{i}\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

där N är ordningen.

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}}$$

Kännetecken:

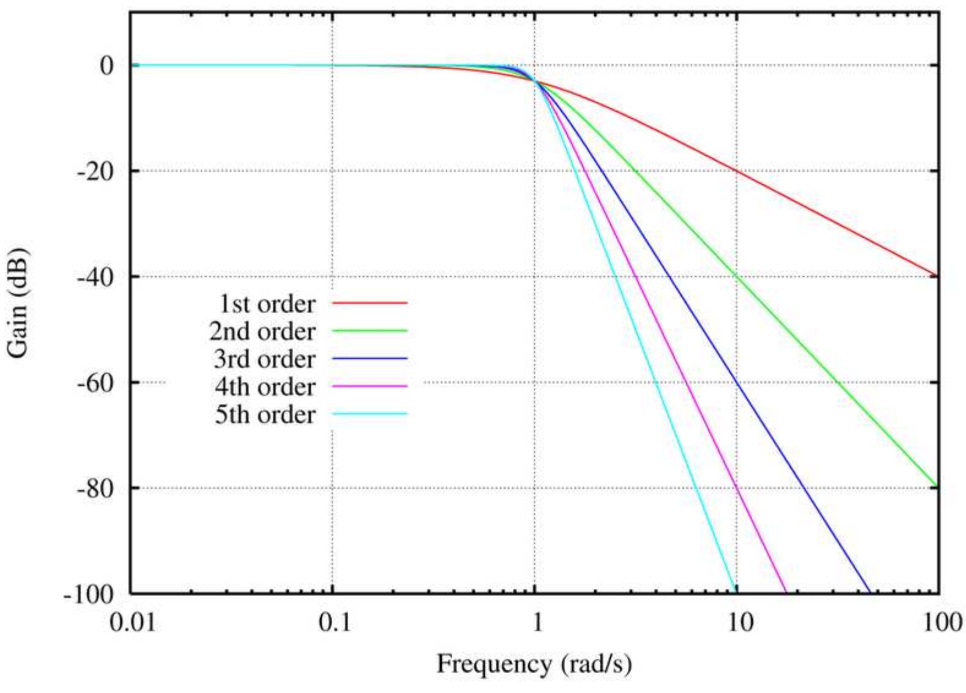
1. $|H(\mathrm{i}\omega)|_{\omega=0} = |H_0|$ oberoende av N.

2. $|H(\mathrm{i}\omega)|_{\omega=\omega_0} = |H_0|/\sqrt{2}$ oberoende av N.

3. $|H(\mathrm{i}\omega)|$ är monotont avtagande då ω ökar (inget rippel). Butterworthkarakteristiken är definierad av att amplitudkarakteristiken är maximalt slät, dvs

$$\left.\frac{\mathrm{d}|H(\mathrm{i}\omega)|}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=0} = \ldots = \frac{\mathrm{d}^{N-1}|H(\mathrm{i}\omega)|}{\mathrm{d}\omega^{N-1}} = 0$$

4. Polerna till $H(s)$ är placerade på en halvcirkel i det vänstra halvplanet med radie ω_0 ⟨fig1⟩, där ω_0 är filtrets brytvinkelfrekvens (bandbredd).



Vinkelavstånd mellan poler $\phi = \pi/N$, vinkelavstånd till imaginäraxeln: $\phi/2$.

Exempel: $N = 2$:

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + 2\,k\,\omega_0\,s + \omega_0^2} = \frac{H_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Ur geometri ⟨fig2⟩:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Peräkna poler ur $H(s)$:

$$s_{1,2} = -k\,\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{k^2-1} = p_{1,2}$$

Vi ser att $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exempel: $N = 3$:

$$H(s) = \frac{H_0}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

$\phi = \pi/3$ ⟨fig3⟩.

$$s_1 = -\omega_0$$

$$s_{2,3} = -\frac{\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0$$

Uppgift G19 ⟨fig4⟩

Ideala operationsförstärkare. Alla operationsförstärkare är negativt återkopplade $\Rightarrow \varepsilon = 0$.

$$\mathrm{KCL_A}: \quad \frac{u_{\mathrm{lp}} - u_1}{R_5} + \frac{u_{\mathrm{hp}} - u_1}{R_6} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_{\mathrm{lp}} R_6 + u_{\mathrm{hp}}\,R_5}{R_5 + R_6}$$

$$\frac{u_s - u_1}{R_3} + \frac{u_{\mathrm{pb}} - u_1}{R_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_s\,R_4 + u_{\mathrm{bp}}\,R_3}{R_3 + R_4}$$

$$\mathrm{KCL}_C: \quad \frac{u_{\mathrm{lp}}}{u_{\mathrm{bp}}} = -\frac{1}{s\,R_2\,C_2}$$

$$\mathrm{KCL}_D: \quad \frac{u_{\mathrm{bp}}}{u_{\mathrm{hp}}} = -\frac{1}{s\,R_1\,C_1}$$

$$\frac{u_{\mathrm{lp}}}{u_{\mathrm{hp}}} = \frac{1}{s^2\,R_1\,R_2\,C_1\,C_2}$$

$u_1 = u_1$ (uttrycken ovan), eliminera u_{bp} och u_{hp}

$$\frac{u_s\,R_4 - u_{\mathrm{lp}}\,s\,R_2\,R_3\,C_2}{R_3 + R_4} = \frac{u_{\mathrm{lp}}\,R_6 + u_{\mathrm{lp}}\,s^2\,R_1\,R_2\,C_1\,C_2}{R_5 + R_6}$$

$$\frac{u_s\,R_4}{R_3 + R_4} = u_{\mathrm{lp}}\left[\frac{s\,R_2\,R_3\,C_2}{R_3 + R_4} + \frac{R_6}{R_5 + R_6} + \frac{s^2\,R_1\,R_2\,C_1\,C_2}{R_5 + R_6}\right]$$

$$\frac{u_{\mathrm{lp}}}{u_s} = \frac{\frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_4}{R_1\,R_2\,R_5\,C_1\,C_2}}{s^2 + s\,\frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_3}{R_1\,R_5\,C_1} + \frac{R_6}{R_1\,R_2\,R_5\,c_1\,C_2}}$$

$R = R_1 = R_2,\ C = C_1 = C_2,\ R_3 = R_5 = R_6$

$$\frac{u_{\mathrm{lp}}}{u_s} = \frac{K}{s^2 + s\,\frac{2\,R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{R\,C} + \frac{1}{(R\,C)^2}} = \frac{K}{s^2 + 2\,\alpha\,\omega_0\,s + \omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(R\,C)^2} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{R\,C}$$

$$2\,\alpha\,\omega_0 = \frac{2\,R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{R\,C} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

Andra ordningens Butterworthfilter: $N = 2, \phi = \pi/2$. Poler

$$s_{1,2} = -\,\alpha\,\omega_0 \pm \mathrm{i}\,\omega_0\sqrt{1 - \alpha^2} = -\,\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R\,C}$$

$$R = \frac{1}{\omega_0\,C} = \frac{1}{2\pi\,f_0\,C} = \ldots = 15.9\,\mathrm{k}\Omega$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$R_4 = R_3\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = R_3\left(\sqrt{2} - 1\right) = \ldots = 4.1\,\mathrm{k}\Omega$$