2006–12–11

Uppgift B8 ⟨fig1⟩

Ideal operationsförstärkare, negativt återkopplad $\Rightarrow \varepsilon = 0$.

Diodkarakteristik (styckvis linjär modell) ⟨fig2⟩. Sök $u_{\mathrm{ut}} = f(u_{\mathrm{in}})$.

Kretsmodell

$u_D < 0.6\,\mathrm{V}$, diod spärrar, $i_D = 0$, avbrott.

$u_D \geqslant 0.6\,\mathrm{V}$, diod leder, ⟨fig3⟩.

$$r_d = \frac{\Delta u_D}{\Delta i_D} = \frac{0.7 - 0.6}{0.010 - 0} = 10\,\Omega$$

Fall 1: $u_D < 0.6$ V, diod spärrar. $i_D = 0$, $i_{\mathrm{op}} = 0$, $i = 0$. Inget spänningsfall över R_1 och vi har $u_{\mathrm{ut}} = u_{\mathrm{in}}$.

Fall 2: $u_D \geqslant 0.6\,\mathrm{V}$, diod leder. ⟨fig4⟩ Kretsekvationer: $i_D = i$, $u_{\mathrm{in}} = u_\gamma + i_D \cdot r_d$, $u_{\mathrm{ut}} = i \cdot R_1 + u_{\mathrm{in}}$.

$$i_D = \frac{u_{\mathrm{in}} - u_\gamma}{r_d}$$

$$i = \frac{u_{\mathrm{ut}} - u_{\mathrm{in}}}{R_1}$$

$$\frac{u_{\mathrm{ut}} - u_{\mathrm{in}}}{R_1} = \frac{u_{\mathrm{in}} - u_\gamma}{r_d}$$

$$\frac{u_{\mathrm{in}}}{r_d} + \frac{u_{\mathrm{in}}}{R_1} - \frac{u_\gamma}{r_d} = \frac{u_{\mathrm{ut}}}{R_1}$$

$$u_{\mathrm{ut}} = u_{\mathrm{in}}\left(\frac{R_1}{r_d} + 1\right) - u_\gamma \frac{R_1}{r_d}$$

$R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega, r_d = 10\,\Omega, u_\gamma = 0.6\,\mathrm{V}$.

$$u_{\mathrm{ut}} = u_{\mathrm{in}}\left(\frac{1000}{10} + 1\right) - 0.6 \cdot \frac{1000}{10}$$

$$u_{\mathrm{ut}} = u_{\mathrm{in}} \cdot 101 - 60$$

$u_{\mathrm{ut,\,max}} = 10\,\mathrm{V}$. Vid vilket värde på u_{in} "bottnar" utsignalen ($u_{\mathrm{ut}} = 10\,\mathrm{V}$).

$$10 = u' \cdot 101 - 60$$

$$\frac{10 + 60}{101} = u' \quad \Rightarrow \quad u' = 0.693\,\mathrm{V}$$

Grafisk beskrivning ⟨fig5⟩.

Uppgift G9 ⟨fig6⟩

Ideala operationsförstärkare, negativ återkoppling: $\varepsilon = 0$.

Beräkna överföringsfunktionen $H(s) = u_0/u_s$. Dimensionera så att kritisk dämpning erhålls (dubbelpol). Kretsekvationer:

$$\mathrm{KCL_A}: \quad \frac{u_s}{R} + \frac{u_0}{R} + u \cdot s\,C_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_s = -u_0 - u\,s\,R\,C_1$$

Vid B, spänningsdelning:

$$u_0 = u \cdot \frac{\frac{1}{s\,C_2}}{R + \frac{1}{s\,C_2}} = u \cdot \frac{1}{1 + s\,R\,C_2}$$

$$\Rightarrow u = u_0(1 + s\,R\,C_2)$$

$$\Longrightarrow \quad u_s = -\,u_0\big(1 + s\,R\,C_1 + s^2\,R^2\,C_1\,C_2\big)$$

$$\frac{u_0}{u_s} = -\,\frac{1}{1 + s\,R\,C_1 + s^2\,R^2\,C_1\,C_2} = -\,\frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{s^2 + s\,\frac{1}{R\,C_2} + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

Beräkna poler till $H(s) = u_0/u_s$.

$$s_{1,2} = -\,\frac{1}{2\,R\,C_2} \pm \sqrt{\frac{1}{(2\,R\,C_2)^2} - \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

Diskriminanten $= 0$:

$$\Rightarrow \frac{1}{4\,C_2} = \frac{1}{C_1}$$

R och C_1 kända, sök C_2:

$$C_2 = \frac{C_1}{4}$$

Uppgift G15 ⟨fig7⟩

$$u_i = u_0 \cdot \frac{R}{R + R_1} \Rightarrow \frac{u_0}{u_i} = \frac{R + R_1}{R} = 1 + \frac{R_1}{R} = K$$

Skriv om ⟨fig8⟩.

$$\text{KCL}_{\text{A}}: \quad (u_{\text{in}} - u)\,s\,C + \frac{u_{\text{ut}} - u}{2\,R} = \frac{u}{R + \frac{1}{s\,C}}$$

$$u_{\text{in}}\,s\,R\,C = u\left[\frac{s\,R\,C}{1 + s\,R\,C} + s\,R\,C + \frac{1}{2}\right] - \frac{u_{\text{ut}}}{2}$$

Spänningsdelning:

$$\frac{u_{\text{ut}}}{K} = u \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{s\,C}}$$

$$\Rightarrow \quad u = u_{\text{ut}} \cdot \frac{1 + s\,R\,C}{K \cdot s\,R\,C}$$

Eliminera u:

$$u_{\text{in}} \cdot s\,R\,C = u_{\text{ut}}\left[\frac{1}{k}\left(1 + 1 + s\,R\,C + \frac{1 + s\,R\,C}{2\,s\,R\,C}\right) - \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{u_{\text{ut}}}{u_{\text{in}}} = \frac{s\,R\,C \cdot K \cdot 2\,s\,R\,C}{(2 + s\,R\,C) \cdot 2\,s\,R\,C + 1 + s\,R\,C - K\,s\,R\,C} = \frac{s^2 (R\,C)^2 \cdot K \cdot 2}{1 + s\,R\,C(5 - K) + s^2 \cdot 2\,(R\,C)^2}$$

Sök poler:

$$s_{1,2} = -\frac{5-K}{4RC} \pm \sqrt{\left(\frac{5-K}{4RC}\right)^2 - \frac{1}{2(RC)^2}}$$

Icke oscillerande stegsvar $\Rightarrow$ polerna måste vara reella.

$$\Rightarrow \frac{5-K}{16} - \frac{1}{2} \geqslant 0$$

$$(5-K)^2 \geqslant 8$$

$$5-K \geqslant 2\sqrt{2}$$

Här måste $5-K>0$, ty vi vill ha poler i vänstra halvplanet, vilket ger oss ett stabilt system. Se uttrycket för $s_{1,2}$ ovan.

$$5-K \geqslant 2\sqrt{2}$$

$$K \leqslant 5-2\sqrt{2}$$

$$K = 1 + \frac{R_1}{R} \leqslant 5-2\sqrt{2}$$

$$R_1 \leqslant R\left(4-2\sqrt{2}\right)$$

Aktiva RC-filter. En frekvensselektiv förstärkare. Realiseras normalt med

- Operationsförstärkare (aktiv)
- Resistanser (passiv)
- Kondensatorer (Kapacitanser), (passiv)

Notera: vi behöver ej använda induktanser vilka ofta är svåra att realisera med bra egenskaper.

Principiella filterkarakteristikor, studera $H(\mathrm{i}\omega)$.

□ Lågpass ⟨fig9a⟩. LP.

□ Högpass ⟨fig9b⟩. HP.

□ Bandpass ⟨fig9c⟩. BP.

□ Bandspärr ⟨fig9d⟩. BS.

□ Allpass: $|H(\mathrm{i}\omega)|=1$. AP. Här är man intresserad av faskarakteristik.

Exempel på verklig amplitudkarakteristik.

Ideala filter som de är beskrivna ovan under principiella filterkarakteristikor är ej realiserbara. Exempel med bandpassfilter: ⟨fig10⟩.

När man ska konstruera verkliga filter börjar man lämpligen med att teckna den önskade överföringsfunktionen.

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \cdots + s \cdot a_1 + a_0}{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \cdots + s \cdot b_1 + b_0} = \frac{a_M}{b_M} \cdot \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_M)}{(s-p_1)\cdots(s-p_N)}$$

Koefficienterna a_i och b_i är reella, $M \leqslant N$. Poler och nollställen kan vara reella eller komplexa.

Första ordningens filter:

$$H(s) = \frac{a_1\, s + a_0}{b_1\, s + b_0}$$

LP-filter: $a_1 = 0, b_1 = 1$:

$$H(s) = \frac{a_0}{s + b_0}$$

⟨fig11⟩. Kretslösning ⟨fig12⟩. Vi får

$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = -\frac{1}{R_1\, C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{R\, C}}$$

Exempel 1: ⟨fig13⟩ Vi får

$$H(s) = K \cdot \frac{\frac{1}{R\, C}}{s + \frac{1}{R\, C}}$$

där förstärkaren K kan realiseras som ⟨fig14⟩.

HP-filter: $a_0 = 0, b_1 = 1$:

$$H(s) = \frac{a_1\, s}{s + b_0}$$

Exempel 1: ⟨fig15⟩

$$H(s) = -\frac{R_1}{R} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{R\, C}}$$

⟨fig16⟩.

Exempel 2: ⟨fig17⟩

AP-filter: $a_1 = b_1 = 1, a_0 = -a, b_0 = a$:

$$H(s) = \frac{s - a}{s + a}$$

En kretslösning ⟨fig18⟩

$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{s - \frac{R_1}{R_2\, R\, C}}{s + \frac{1}{R\, C}}$$

Andra ordningens filter

Tecknas generellt som

$$H(s) = \frac{a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0}{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}$$

Filtertyp

1. Lågpass: $a_1 = a_2 = 0$

2. Bandpass: $a_2 = a_0 = 0$

3. Högpass: $a_0 = a_1 = 0$

4. Bandspärr: $a_1 = 0$

5. Allpass:

$$H(s) = \frac{b_2\, s^2 - b_1\, s + b_0}{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}$$

LP-filter

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

⟨fig19⟩

$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = \frac{\frac{K}{R_1\, R_2\, C_1\, C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2\, C_1} + \frac{1-K}{R_2\, C_2}\right) + \frac{1}{R_1 R_2\, C_1 C_2}}$$

HP-filter

$$H(s) = \frac{a_2\, s^2}{s^2 + b_1\, s + b_0}$$

⟨fig20⟩

$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = \frac{K\, s^2}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_2\, C_2} + \frac{1}{R_2\, C_1} + \frac{1-K}{R_1\, C_1}\right) + \frac{1}{R_1\, R_2\, C_1\, C_2}}$$

Bandpassfilter (BP)

$$H(s) = \frac{a_1\, s}{s^2 + b_1\, s + b_0} = \frac{A\, s}{s^2 + B\, s + \omega_0^2}$$

Med belopp: $|H(s)|_{s=\mathrm{i}\omega}$.

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{A\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega\, B)^2}} = \frac{A\omega}{B\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\, B}\right)^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}} =$$

$$= \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{B^2}\left[\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right]^2}} \tag{1}$$

Egenskaper hos $|H(\mathrm{i}\omega)|$ för bandpassfiltret.

1.

$$|H(\mathrm{i}\omega)|_{\max} = \frac{A}{B}$$

(Kvot mellan koefficienterna för s-term i täljare och nämnare.)

2. Likhet inträffar vid frekvensen $\omega = \omega_0$. Roten ur konstanta termen i nämnarpolynomet.

3. Bandbredden B ⟨fig21⟩. Bandbredd $B = \omega_{\text{ö}} - \omega_{\text{u}}$. Detta erhålls genom att sätta (se ekvation 1).

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vilket ger

$$\frac{1}{B^2}\left[\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right]^2 = 1$$

Vi får fyra lösningar, två positiva och två negativa. Skillnaden mellan de två positiva lösningarna motsvarar $\omega_{\text{ö}} - \omega_{\text{u}}$ och blir lika med B, alltså koefficienten framför s-termen i nämnarpolynomet.

Exempel ⟨fig22⟩

$$\frac{u_0}{u_i} = H(s) = -\frac{s\,R_1\,C_2}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1\,C_1} + \frac{1}{R_2\,C_2}\right) + \frac{1}{R_1\,R_2\,C_1\,C_2}}$$

Ett bekvämt sätt att realisera godtyckliga rationella överföringsfunktioner är att kaskadkoppla *första* och *andra* ordningens länkar. $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s)$. Varje länk bör då ha hög inimpedans och låg utimpedans, då belastar länkarna ej varandra (poler och nollställen ändras ej som en följd av kaskadkopplingen).